Resistencia de Materiales:
Resumen de teoría y problemas resueltos

José Luis Blanco Claraco
Francisco Javier Garrido Jiménez
Javier López Martínez

Departamento de Ingeniería
Área de Ingeniería Mecánica
Universidad de Almería

Javier Fernando Jiménez Alonso

Departamento de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno
Universidad de Sevilla

Alejandro Mateo Hernández Díaz

Departamento de Ingeniería Civil
Universidad Católica de Murcia

Versión preliminar
(fecha: 13 de octubre de 2020)

Resistencia de materiales

Editorial Universidad de Almería, 2016
editorial@ual.es
www.ual.es/editorial
Telef.: 950 01 54 59

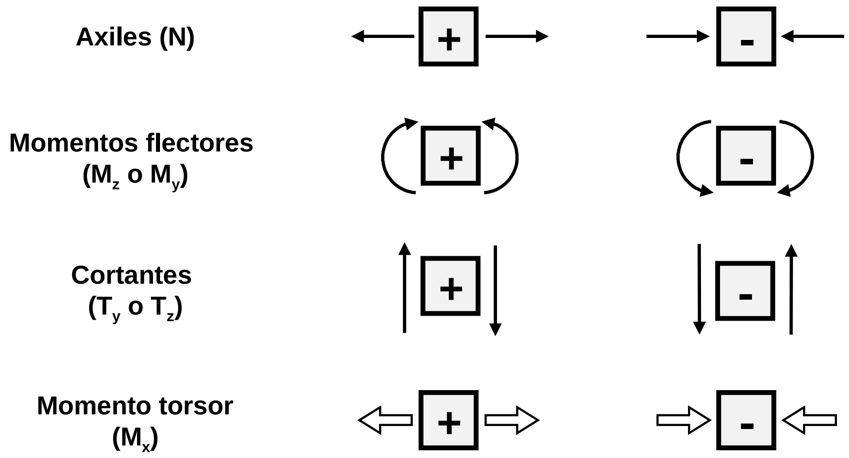
ISBN: 978-84-16642-36-6
Depósito legal: AL 1253-2016

ÍNDICE GENERAL

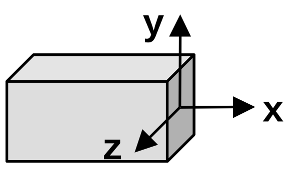
INTRODUCCIÓN

El contenido de esta obra está encuadrado en el de un curso de Resistencia de Materiales para alumnos de esta disciplina en titulaciones de Grado en Ingenierías. El contenido y extensión de la obra está adaptado a los actuales planes de estudios en dichas titulaciones. La obra se divide en 9 temas que incluyen una relación de problemas originales, resueltos paso a paso, y diversos problemas propuestos con sus soluciones. Además, al inicio de cada tema se expone un resumen de los contenidos teóricos esenciales y necesarios para resolver los problemas. A lo largo del texto se estudian las tensiones y deformaciones que se derivan de solicitaciones externas actuando sobre un prisma mecánico. Mediante ejemplos prácticos, se analizan de forma independiente los efectos producidos por los distintos esfuerzos que pueden aparecer en las secciones del prisma: axiles, cortantes, momentos flectores y momento torsor.

NOTACIÓN



Resumen de criterios de signos para los esfuerzos en Resistencia de Materiales. Cada esfuerzo se compone de dos fuerzas (o dos momentos), aplicados en las caras izquierda y derecha de una sección de espesor infinitesimal.



Criterio de ejes de coordenadas asumido para denotar los esfuerzos de la tabla superior: X eje longitudinal, Y y Z suelen coincidir con los ejes principales de inercia de la sección.

TEMA 1

EQUILIBRIO ISOSTÁTICO DE ESTRUCTURAS

1.1. Resumen de conceptos teóricos

1.1.1. Sistemas isostáticos e hiperestáticos

Sistema isostático: aquel en que el número de restricciones que tiene la estructura es estrictamente suficiente para impedir cualquier movimiento. La obtención de todas las fuerzas que actúan sobre la estructura puede llevarse a cabo mediante las *ecuaciones de la estática*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{(Equilibrio de fuerzas)} \tag{1.1a}$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0} \quad \text{(Equilibrio de momentos)} \tag{1.1b}$$

En el caso habitual de una estructura plana, las ecuaciones anteriores se particularizan en las tres ecuaciones de la estática siguientes:

$$\sum_i F_{x_i} = 0 \tag{1.2a}$$

$$\sum_i F_{y_i} = 0 \tag{1.2b}$$

$$\sum_i M_{z_i} = 0 \tag{1.2c}$$

donde F_{x_i} y F_{y_i} son las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de cada una de las cargas puntuales aplicadas sobre la estructura, y M_{z_i} cada uno de los momentos. Nótese que en estructuras planas contenidas en el plano xy, dichos momentos sólo podrán contener componentes en la dirección z.

	Valor	**Posición**
Fórmula genérica	$F = \int q(x)dx$	$\bar{x} = \dfrac{\int xq(x)dx}{\int q(x)dx}$
Carga rectangular, ancho L, alto q	$F = qL$	$\bar{x} = \frac{1}{2}L$
Carga triangular, ancho L, alto q	$F = \frac{1}{2}qL$	$\bar{x} = \frac{1}{3}L$ (desde el lado alto)
Carga parabólica, ancho L, alto q	$F = \frac{1}{3}qL$	$\bar{x} = \frac{1}{4}L$ (desde el lado alto)

Tabla 1.1: Resumen del cálculo de fuerzas concentradas equivalentes (F,$\bar{x}$) a una carga distribuida $q(x)$.

Sistema hiperestático: aquel en que existe un mayor número de restricciones en la estructura que el mínimo necesario para mantener su equilibrio. Para conocer las fuerzas que actúan sobre la estructura es necesario recurrir al análisis de las deformaciones.

Mecanismo: su estructura no cuenta con suficientes restricciones para verificar el equilibrio estático, de tal forma que bajo la acción de las fuerzas exteriores, bien toda aquélla o una parte de la misma sufre aceleraciones.

Cabe la posibilidad de que existan combinaciones de los estados básicos anteriores. Por ejemplo, una estructura puede ser hiperestática en sus reacciones exteriores y un mecanismo interno, dando lugar globalmente a un conjunto isostático.

1.1.2. Cargas distribuidas

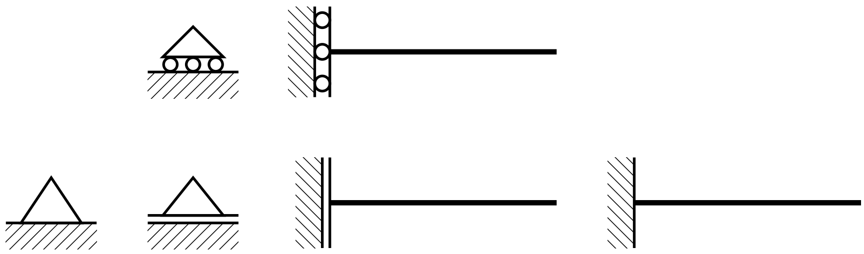
En caso de existir cargas distribuidas, se podrá proceder a resolver las ecuaciones de la estática por dos métodos:

1. Sustituir los sumatorios en la Ec. (1.2) por integrales definidas, o

2. Calcular las cargas puntuales equivalentes a las distribuidas y resolver empleando éstas.

Normalmente es más eficiente el segundo método. Las cargas equivalentes siempre generan las mismas reacciones externas que las cargas originales, pero es importante resaltar que no será así para las tensiones y esfuerzos (conceptos que se verán en temas sucesivos) dentro de la zona de aplicación de las cargas distribuidas originales.

Toda fuerza distribuida $q(x)$ a lo largo de una dirección x se puede reemplazar por una fuerza puntual de valor F (positivo o negativo, según su sentido) colocada a una distancia $\bar{x}$ del origen de la carga distribuida. Se demuestra que para que la carga concentrada equivalente genere la misma fuerza total que la distribuida, F debe valer el área, con signo, bajo la curva $q(x)$, mientras que la igualdad de par de fuerzas obliga a que $\bar{x}$ sea el centroide de la curva. La tabla 1.1 resume las fórmulas genéricas y algunos casos particulares de fuerzas equivalentes.



(a) Apoyo articulado (b) Apoyo simple (c) Deslizadera (d) Empotramiento

Figura 1.1: Tipos más habituales de restricciones: (a) Apoyo simple: se restringe el desplazamiento en una dirección, (b) apoyo articulado: se restringen todos los desplazamientos, (c) deslizadera: se restringe el giro y el desplazamiento en una dirección, (d) empotramiento: todos los giros y desplazamientos restringidos.

1.1.3. Determinación del grado de hiperestaticidad de estructuras planas

Para estructuras planas con todas las cargas en el mismo plano, el grado de hiperestaticidad externa (GHE) se obtiene como la diferencia entre el número de restricciones y el mínimo necesario para fijar la estructura (que son tres):

$$GHE = R - 3 \tag{1.3}$$

El grado de hiperestaticidad interna (GHI), referido a las conexiones internas de la estructura, y el grado de hiperestaticidad (GH) total de la estructura verifican:

$$GH = GHI + GHE \tag{1.4}$$

Se deduce si una estructura es isostática, hiperestática o mecanismo mediante la comparación del número de incógnitas existentes (I) con la cantidad de ecuaciones (E) de la estática que es posible obtener, siendo $GH = I - E$. El número de incógnitas en una estructura plana se deduce de la siguiente expresión:

$$I = 6B + R \qquad \text{(Incógnitas: fuerzas en uniones y restricciones)} \tag{1.5}$$

donde B es el número de barras y R el número de restricciones exteriores de la estructura.

El número total de incógnitas es de 6 por cada barra (2 fuerzas y 1 momento en cada extremo de barra) a las que se suman las externas. El número de ecuaciones de la estática que se obtienen de la estructura es de 3 por cada barra y nudo (equilibrio de fuerzas en barra y nudo) a las que se suman los valores conocidos (iguales a 0) con cada desconexión que se realiza:

$$E = 3B + 3N + N_{desc} \qquad \text{(Ecuaciones de equilibrio)} \tag{1.6}$$

donde, B es el número total de barras de la estructura, N el número de nudos y N_{desc} el número de *desconexiones*.

Cada vez que se realiza una desconexión se obtienen ecuaciones adicionales porque se sabe que determinados valores se igualan a 0. La Figura 1.2 muestra algunos ejemplos de desconexiones. Cuando se articula un nudo el número de desconexiones realizadas es igual $n - 1$, siendo n el número de barras que confluyen en el nudo.

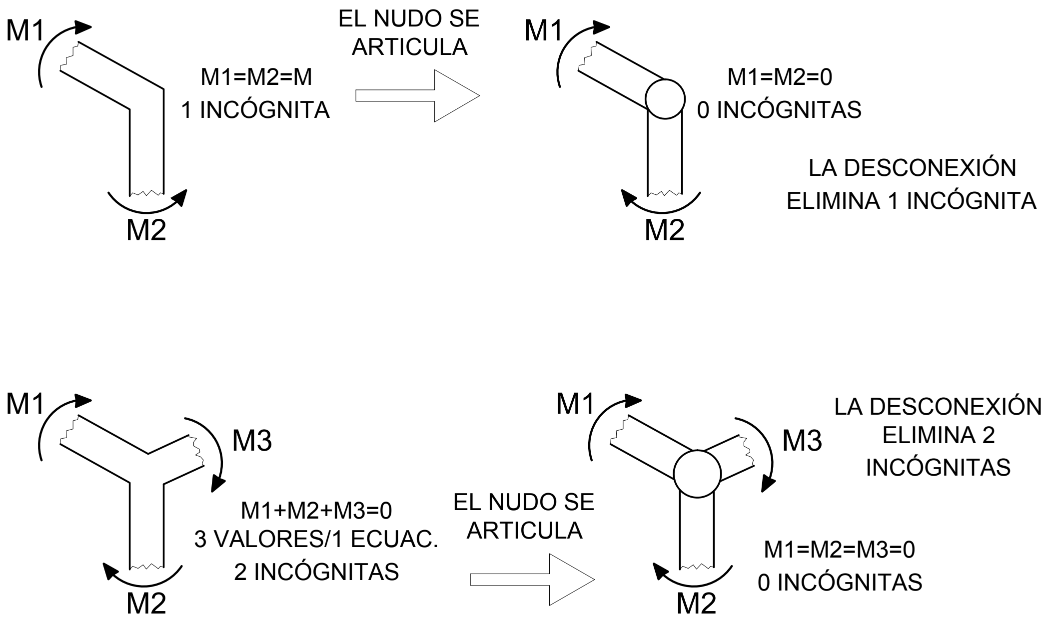


Figura 1.2: Ejemplos de desconexiones en nudos.

1.1.4. Método de cálculo de reacciones

Si una estructura es *globalmente hiperestática* ($GH > 0$), no es posible resolverla completamente (obtener las reacciones y los esfuerzos internos en las barras) empleando únicamente las ecuaciones de la estática. Será necesario plantear un número adicional de ecuaciones, tantas como grados de hiperestaticidad global ($GH > 0$) existan, relacionando las deformaciones de la estructura con las condiciones de contorno en los apoyos. Este caso se estudiará en temas sucesivos. Puede ocurrir que la estructura sea *globalmente hiperestática* ($GH > 0$), pero *externamente isostática* ($GHE = 0$). En este caso sí se podrán obtener las reacciones en los apoyos planteando las ecuaciones de la estática, pero no se podrá resolver la estructura internamente (esfuerzos en las barras) mediante dichas ecuaciones de equilibrio estático.

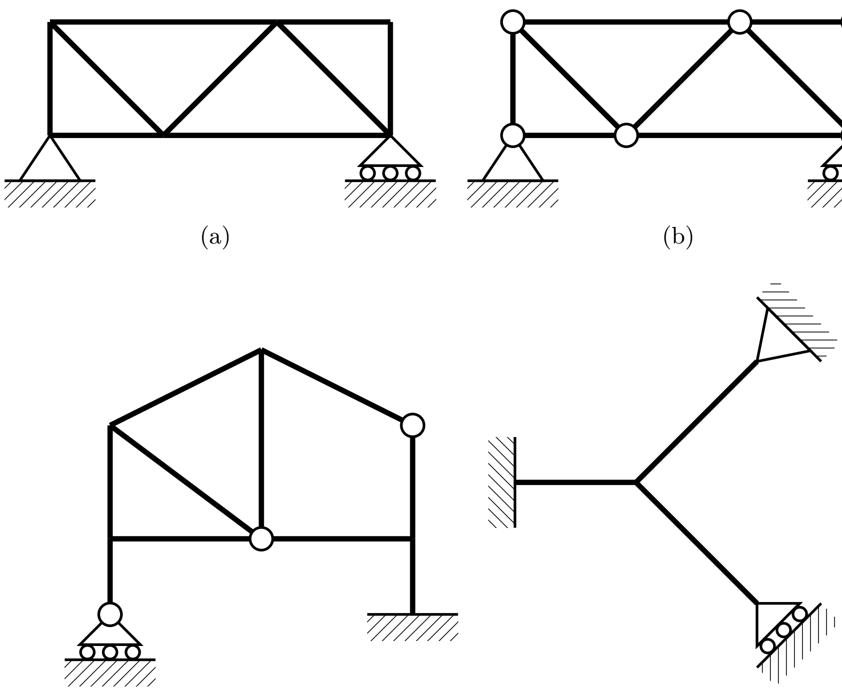
Para estructuras *globalmente* ($GH = 0$) y *externamente* ($GHE = 0$) isostáticas, las reacciones existentes (que serán tres) podrán hallarse planteando las tres ecuaciones de la estática, Ec. (1.2) para el conjunto de la estructura, es decir, incluyendo todas las cargas y reacciones.

Por último, estructuras *globalmente isostáticas* ($GH = 0$) pero *externamente hiperestáticas* ($GHE > 0$), requerirán de las tres ecuaciones de la estática mencionadas anteriormente, más un número GHE de ecuaciones de la estática adicionales. Típicamente, se planteará que la fuerza o el momento en una unión interna de la estructura es cero, teniendo en cuenta para el sumatorio solamente las fuerzas y momentos de una de las dos mitades en que dicho punto divide a la estructura. La existencia de dichos puntos está asegurada ya que en este caso $GHI < 0$ al ser $GHI = GH - GHE$, por lo que la estructura es internamente un mecanismo y por tanto existen pares cinemáticos que permiten el movimiento en GHE grados de libertad, en cuya dirección de desplazamiento (deslizaderas) o giro (rótulas) el giro está permitido y por tanto no existe fuerza desconocida alguna. Ver los problemas resueltos 1.2.4 y 1.2.5 para ejemplos de este caso.

1.2. Problemas resueltos

1.2.1. Problema 1

Se deberá determinar si las siguientes estructuras son globalmente isostáticas o hiperestáticas:



(a) (b) (c) (d)

Figura 1.3

Solución

(a)
- $I = 6B + R = 6 \cdot 9 + 3 = 57$
- $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 0 = 45$

$\rightarrow$ La estructura es hiperestática grado 12.

(b)
- $I = 6B + R = 6 \cdot 9 + 3 = 57$
- $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 12 = 57$

$\rightarrow$ La estructura es isostática

(c)
- $I = 6B + R = 6 \cdot 10 + 4 = 64$
- $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 = 58$

$\rightarrow$ La estructura es hiperestática grado 6

(d)
- $I = 6B + R = 6 \cdot 3 + 6 = 24$
- $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 0 = 21$

$\rightarrow$ La estructura es hiperestática grado 3

1.2.2. Problema 2

Determinar el grado de hiperestaticidad interno, externo y global de las siguientes estructuras:

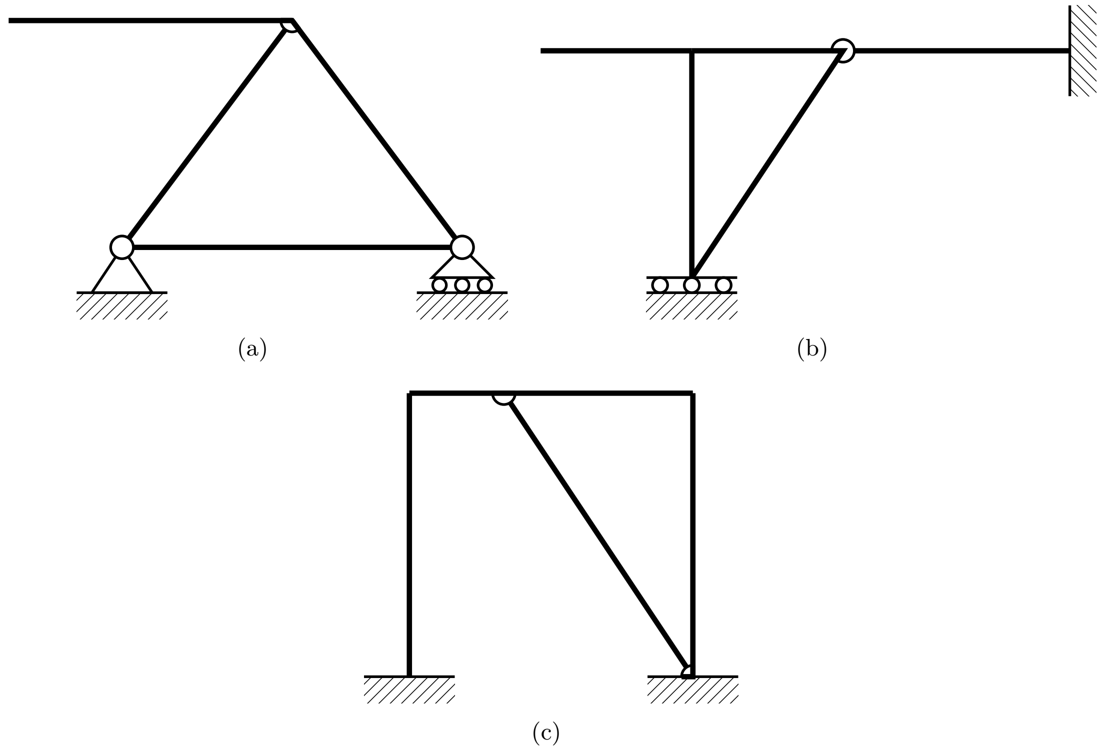


Figura 1.4

Solución

(a)
- $GHE = R - 3 = 3 - 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Externamente isostático
- $GH = I - E = (6B + R) - (3B + 3N + N_{desc}) = (6 \cdot 4 + 3) - (3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3) = 27 - 27 = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Globalmente isostático
- $GHI = GH - GHE = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Internamente isostático

(b)
- $GHE = R - 3 = 5 - 3 = 2 \quad \longrightarrow \quad$ Externamente hiperestático
- $GH = I - E = (6B + R) - (3B + 3N + N_{desc}) = (6 \cdot 5 + 5) - (3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 1) = 35 - 31 = 4 \quad \longrightarrow \quad$ Globalmente hiperestático
- $GHI = GH - GHE = 2 \quad \longrightarrow \quad$ Internamente hiperestático

(c)
- $GHE = R - 3 = 6 - 3 = 3 \quad \longrightarrow \quad$ Externamente hiperestático
- $GH = I - E = (6B + R) - (3B + 3N + N_{desc}) = (6 \cdot 5 + 6) - (3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2) = 36 - 32 = 4 \quad \longrightarrow \quad$ Globalmente hiperestático
- $GHI = GH - GHE = 1 \quad \longrightarrow \quad$ Internamente hiperestático

Las dos desconexiones vienen una de cada extremo de la barra biarticulada.

1.2.3. Problema 3

Calcular las reacciones exteriores para que la siguiente estructura se encuentre en equilibrio.

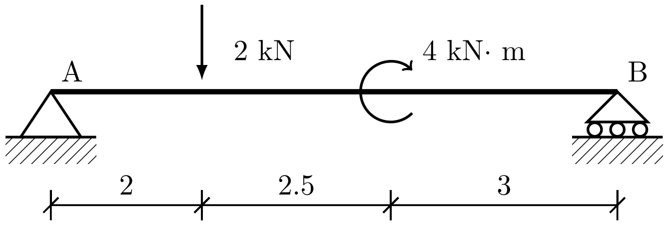


Figura 1.5: Cotas en metros.

Solución

Aunque en este caso es muy evidente, se comprobará igualmente que la estructura planteada es isostática:

- Nº de Incógnitas: $I = 6B + R = 6 \cdot 1 + 3 = 9$
- Nº de Ecuaciones: $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 = 9$

Luego $GH = I - E = 0$, y la estructura es isostática.

El equilibrio de la estructura, planteada como sólido rígido, exige que la resultante de todas las fuerzas y momentos *externos* que actúan sobre la estructura sea nula. En este caso las fuerzas externas que actúan son las siguientes:

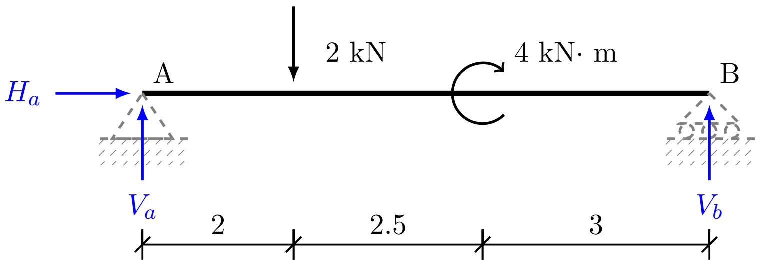


Figura 1.6: Estructura, incluyendo las reacciones ejercidas por los apoyos.

El equilibrio de fuerzas verticales y horizontales y de momentos (tomados con respecto a la sección A) nos da el sistema de ecuaciones:

$$(+\rightarrow)\sum F_x = H_a = 0 \tag{1.7a}$$

$$(+\uparrow)\sum F_y = V_a + V_b - 2 = 0 \tag{1.7b}$$

$$(+\circlearrowleft)\sum M_A = 7.5 \text{ m } \cdot V_b - 2 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 4 \text{ kN·m} = 0 \tag{1.7c}$$

de donde resolviendo se obtiene que $V_b = 1.06$ kN ($\uparrow$) y $V_a = 0.96$ kN ($\uparrow$).

1.2.4. Problema 4

Calcular las reacciones exteriores para que la siguiente estructura se encuentre en equilibrio. Nótese la existencia de rótulas (nudos articulados) en las secciones C y E de la viga continua.

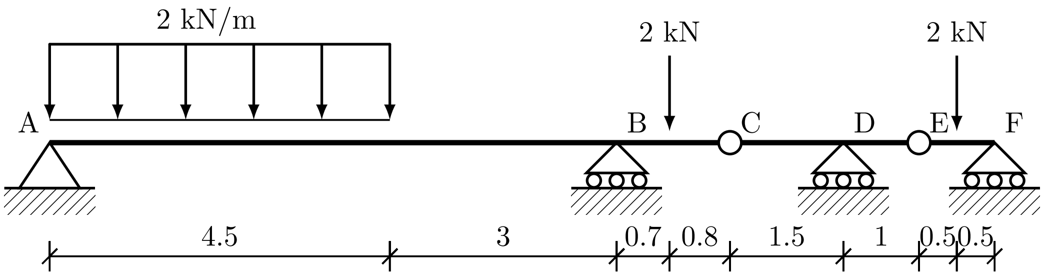


Figura 1.7: Cotas en metros.

Solución

En primer lugar, determinamos el grado de hiperestaticidad de la estructura:

- Nº de Incógnitas: $I = 6B + R = 6 \cdot 5 + 5 = 35$
- Nº de Ecuaciones: $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 = 35$

Luego $GH = I - E = 0$, siendo la estructura globalmente isostática, externamente hiperestática ($GHE = 2$) y por tanto internamente un mecanismo ($GHI = -2$). Podemos por lo tanto aplicar el método expuesto en §1.1.4 para determinar las reacciones. Aplicaremos las tres ecuaciones de la estática globales y dos más para los momentos (que se saben nulos) en los pares cinemáticos internos, es decir, en las rótulas C y E. Así podremos obtener las cinco reacciones mediante un sistema de cinco ecuaciones.

El equilibrio de fuerzas verticales y horizontales y de momentos (tomados con respecto a la sección A) nos da el sistema de ecuaciones:

$$(+\uparrow)\sum F_y = V_a + V_b + V_d + V_f - 2\text{ kN/m} \cdot 4.5\text{ m} - 2\text{ kN} - 2\text{ kN} = 0 \tag{1.8a}$$

$$(+\rightarrow)\sum F_x = H_a = 0 \tag{1.8b}$$

$$(+\circlearrowleft)\sum M_A = V_b \cdot 7.5\text{ m} + V_d \cdot 10.5\text{ m} + V_f \cdot 12.5\text{ m} - 2\text{ kN/m} \cdot 4.5\text{ m} \cdot 2.25\text{ m} - 2\text{ kN} \cdot 8.2\text{ m} - 2\text{ kN} \cdot 12\text{ m} = 0 \tag{1.8c}$$

En los casos como éste en que la estructura sea externamente hiperestática, no será posible resolver directamente con las tres ecuaciones de la estática, debido a que tendremos más incógnitas que ecuaciones. La solución es añadir nuevas ecuaciones de equilibrio. Hay dos opciones:

- Partir la estructura en dos o más partes y plantear las tres ecuaciones de cada una de ellas, incluyendo todas las fuerzas que puedan aparecer al realizar la partición, o

- Plantear equilibrio de momentos en una rótula, donde se sabe que al no ofrecer resistencia de giro sobre el eje z no habrá momento (es un caso particular de la estrategia anterior).

Tomando momentos con respecto a la sección E, tenemos:

$$\sum M_E = V_f \cdot 1 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 0.5 \text{ m} = 0 \tag{1.9}$$

de donde $V_f = 1$ kN (↑). Repitiendo la operación en la sección C, una vez conocido V_F:

$$\sum M_C = V_d \cdot 1.5 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot 3.5 \text{ m} = 0 \tag{1.10}$$

de donde $V_d = 1.66$ kN (↑). Sustituyendo estos dos valores en la Ec. (1.8), obtenemos finalmente:

$$V_a = 6.25 \text{ kN}(\uparrow) \tag{1.11a}$$
$$V_b = 4.06 \text{ kN}(\uparrow) \tag{1.11b}$$
$$H_a = 0 \text{ kN} \tag{1.11c}$$

1.2.5. Problema 5

Calcular las reacciones exteriores para que la siguiente estructura se encuentre en equilibrio, si las tres barras AB, BC y BD tienen la misma longitud, y las tres distancias AD, AC y CD son idénticas y de valor a metros. Existe una carga de valor 1 kN en el punto C coincidiendo con la dirección CD.

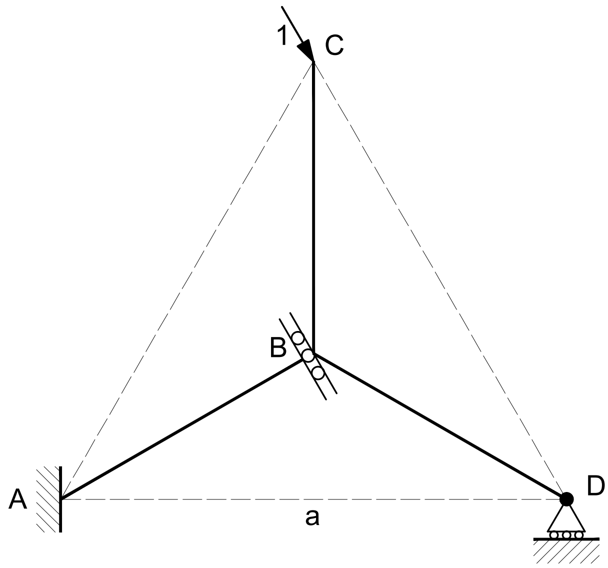


Figura 1.8: Cotas en metros.

Solución

Estudio del grado de hiperestatismo:

- Nº de Incógnitas: $I = 6B + R = 6 \cdot 3 + 4 = 22$
- Nº de Ecuaciones: $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 = 22$

Luego la estructura es internamente un mecanismo ($GHI = -1$), externamente hiperestática ($GHE = 1$) y globalmente isostática ($GH = 0$). Aplicando el método expuesto en §1.1.4 para determinar las reacciones, usaremos las tres ecuaciones de la estática globales y una más para aprovechar la información de que la fuerza entre ambas partes de la corredera deslizando en el punto B debe ser nula en la dirección de deslizamiento, al ser ésta la dirección libre de este par cinemático. Éste es también el motivo por el que contamos una desconexión en este nudo. El equilibrio de fuerzas existente en dicho punto se analiza en la Figura 1.9.

Las tres ecuaciones de la estática, aplicadas a la estructura en su conjunto y empleando ejes de coordenadas X e Y en la direcciones habituales (horizontal y vertical, respectivamente), quedan:

$$\sum F_X = 0 \quad (1.12a)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad (1.12b)$$

$$\sum M_D = 0 \quad (1.12c)$$

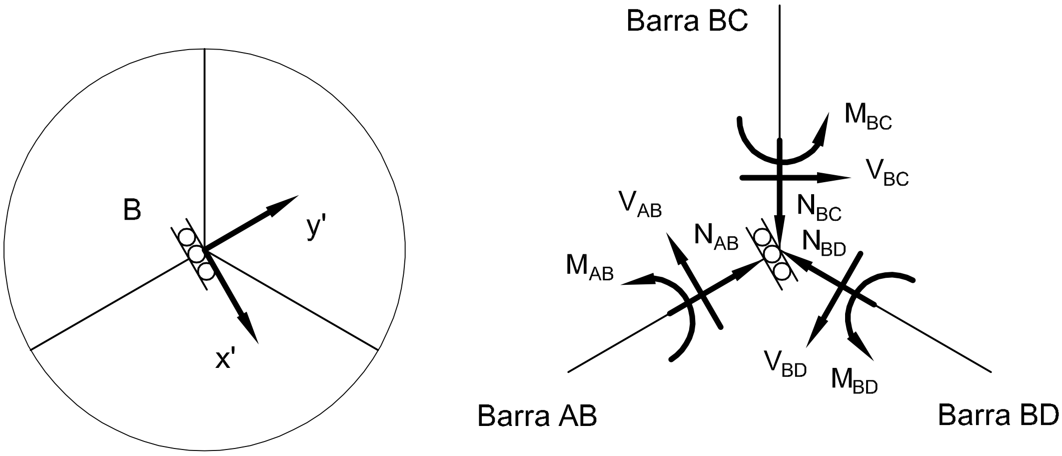


Figura 1.9: Detalle del nudo B y equilibrio de fuerzas en el mismo.

Y adicionalmente, la deslizadera nos permite establecer una ecuación adicional ya que no puede existir reacción en la dirección de la deslizadera por el lado de la barra AB, V_{AB} en la Figura 1.9, luego:

$$V_{AB} = 0 \quad \text{(Mirando la mitad izquierda-inferior)} \tag{1.13a}$$

o bien

$$\sum F_{X'} = 0 \quad \text{(Mirando la mitad derecha-superior)} \tag{1.13b}$$

Desarrollando el equilibrio de fuerzas verticales y horizontales en el conjunto de la estructura:

$$\sum F_X = H_a + 1 \text{ kN} \cdot \sin 30^\circ = 0 \tag{1.14a}$$

$$\sum F_Y = V_a + V_d - 1 \text{ kN} \cdot \cos 30^\circ = 0 \tag{1.14b}$$

de donde se obtiene $H_a = -0.5$ kN ($\leftarrow$). Para obtener ecuaciones adicionales se plantea el equilibrio de fuerzas a la derecha de la deslizadera en la dirección paralela a ésta:

$$\sum F_{X'} = V_d \cos 30^\circ - 1 = 0 \tag{1.15}$$

Despejando de estas ecuaciones, obtenemos:

$$V_d = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ kN} \quad (\uparrow) \tag{1.16a}$$

$$V_a = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \text{ kN} \quad (\downarrow) \tag{1.16b}$$

El momento en el empotramiento se podrá obtener a partir del equilibrio de momentos respecto al punto D:

$$\sum M_D = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot a - M_a = 0 \longrightarrow M_a = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ kN} \quad (\circlearrowright) \tag{1.17}$$

1.2.6. Problema 6

Calcular las reacciones exteriores para que la siguiente estructura se encuentre en equilibrio y obtener las fuerzas internas en los extremos las barras.

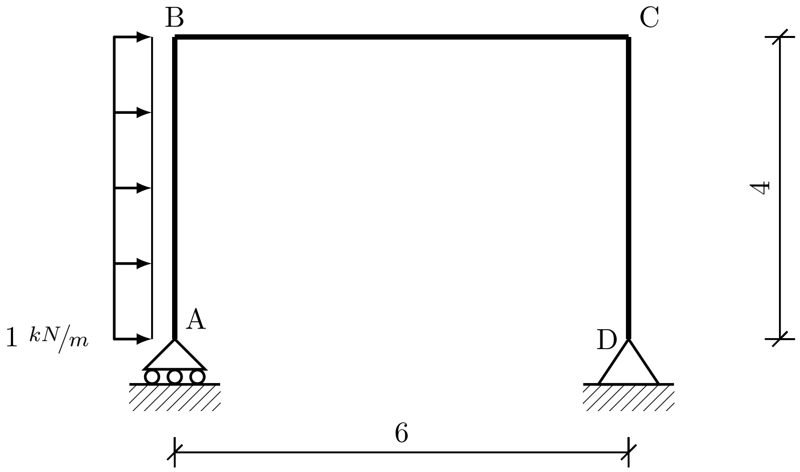


Figura 1.10: Cotas en metros.

Solución

Estudio del grado de hiperestatismo:

- Nº de Incógnitas: $I = 6B + R = 6 \cdot 3 + 3 = 21$
- Nº de Ecuaciones: $E = 3B + 3N + N_{desc} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 0 = 21$

Luego la estructura es internamente, externamente y globalmente isostática.
Planteamos las ecuaciones de la estática:

$$(+\rightarrow)\sum F_h = H_d + 1\ \mathrm{kN/m} \cdot 4\ \mathrm{m} = 0 \quad (1.18a)$$
$$(+\uparrow)\sum F_v = V_a + V_d = 0 \quad (1.18b)$$
$$(+\circlearrowright)\sum M_a = 1\ \mathrm{kN/m} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} - V_d \cdot 6\ \mathrm{m} = 0 \quad (1.18c)$$

de donde, despejando:

$$V_a = -1.33\ \mathrm{kN}\ (\downarrow) \quad (1.19a)$$
$$V_d = 1.33\ \mathrm{kN}\ (\uparrow) \quad (1.19b)$$
$$H_d = -4\ \mathrm{kN}\ (\leftarrow) \quad (1.19c)$$

El equilibrio de fuerzas en los nudos se obtiene por el principio del corte: se procede a cortar la estructura en los nudos B, C y D, sucesivamente, y se plantean las ecuaciones de la estática para una de las dos mitades. La elección de uno u otro lado del corte es irrelevante, aunque se recomienda escoger la que plantee el menor número de fuerzas para evitar errores. El resultado se muestra en la Figura 1.11.

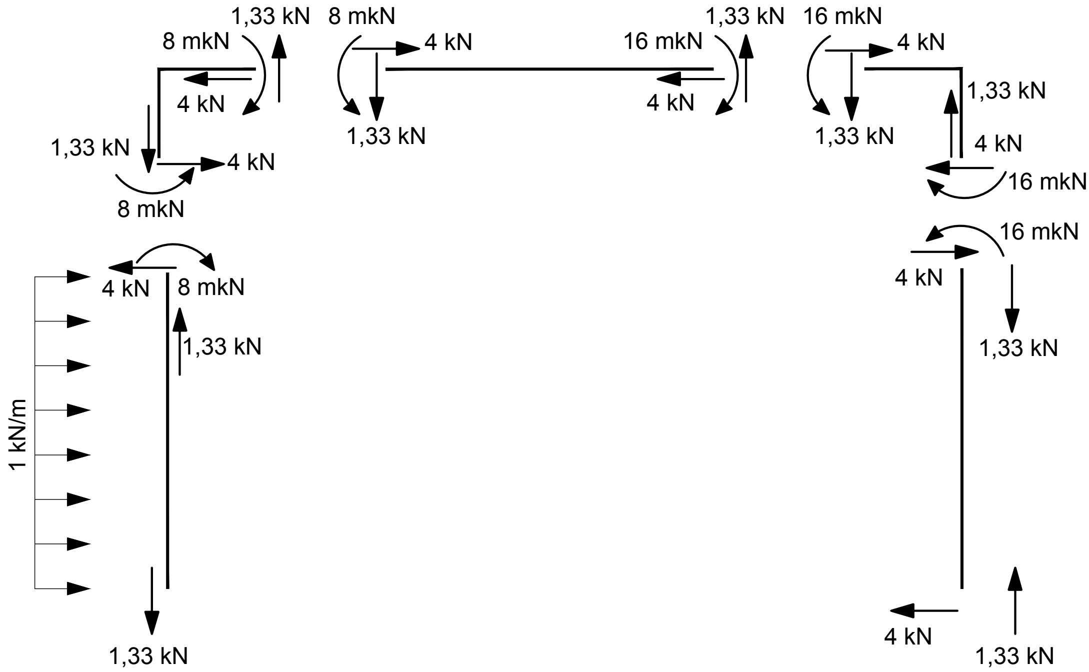


Figura 1.11: Fuerzas y momentos existentes en cada nudo.

1.2.7. Problema 7

Calcular las reacciones de las siguientes estructuras, sometidas a cargas distribuidas.

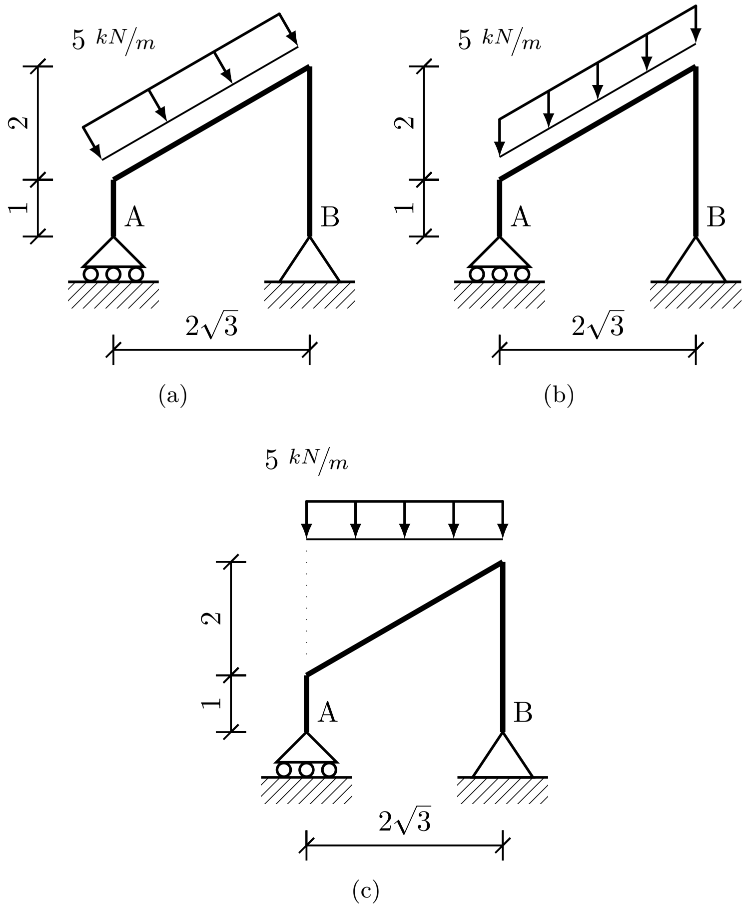


Figura 1.12: Cotas en metros.

Solución

En los tres casos de cargas (a), (b) y (c), la estructura es idéntica y se trata de un caso de isostatismo externo e interno, por lo que bastará convertir las cargas distribuidas en concentradas equivalentes para plantear las ecuaciones de la estática y despejar el valor de las tres reacciones.

Necesitaremos la longitud de la barra oblicua sobre la que se aplica la carga distribuida. Ya que conocemos las cotas horizontal ($2\sqrt{3}$ m) y vertical (2 m), aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos su longitud $L = 4$ m.

Caso de carga (a): Tenemos una carga distribuida uniforme perpendicular a la barra. Siguiendo el procedimiento explicado en §1.1.2, pasamos a sustituir esta carga por una carga concentrada equivalente con la misma dirección y sentido que la original, con un valor F igual al área de la curva de densidad de carga (en este caso al ser rectangular $F = 5\ {}^{kN}\!/_{m}\ 4m = 20\ kN$) y localizada en el centroide de dicha curva de carga (la distancia media por ser un densidad uniforme):

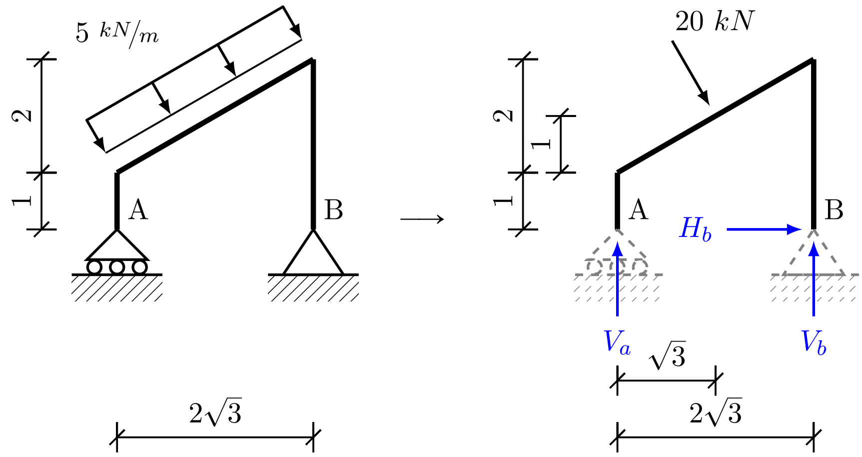


Figura 1.13: Diagrama de cuerpo libre de la estructura para el caso de carga (a).

donde nos interesa descomponer la carga de 20 kN en sus componentes horizontal y vertical. Sabiendo que la barra sobre la que actúa hace 30° con la horizontal y que dicha carga es perpendicular a la barra, se ve que dicha fuerza también hace 30° con la vertical. Por trigonometría, obtenemos por tanto que su componente horizontal es de $20 \sin 30^\circ = 10$ kN ($\rightarrow$) y la vertical de $20 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3}$ kN ($\downarrow$). Planteando las ecuaciones de la estática:

$$(+\rightarrow) \sum F_h = H_b + 10 \text{ kN} = 0 \tag{1.20a}$$

$$(+\uparrow) \sum F_v = V_a + V_b - 10\sqrt{3} \text{ kN} = 0 \tag{1.20b}$$

$$(+\circlearrowleft) \sum M_a = 2\sqrt{3} \text{ m } \cdot V_b - 10 \text{ kN } \cdot 2 \text{ m } - 10\sqrt{3}\ kN \cdot \sqrt{3}\ m = 0 \tag{1.20c}$$

Despejando, obtenemos el valor de las reacciones:

$$V_a = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ kN}(\uparrow) \tag{1.21a}$$

$$H_b = -10 \text{ kN}(\leftarrow) \tag{1.21b}$$

$$V_b = \frac{25}{\sqrt{3}} \text{ kN}(\uparrow) \tag{1.21c}$$

Caso de carga (b): Tenemos una carga distribuida uniforme...:

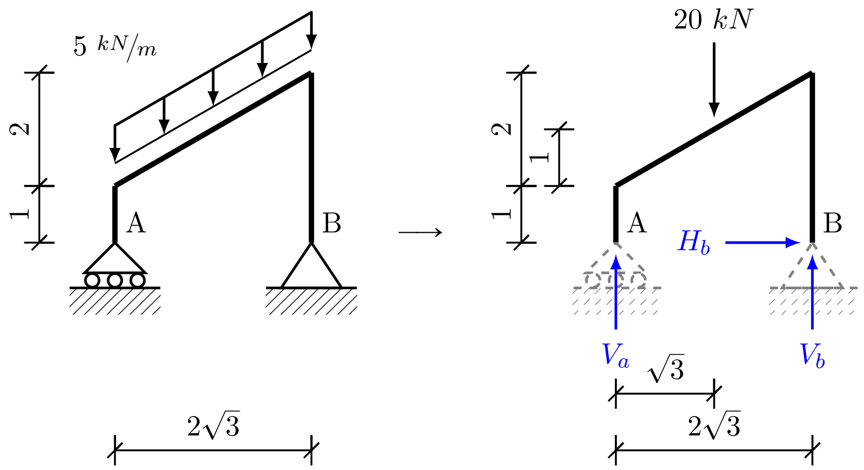


Figura 1.14: Diagrama de cuerpo libre de la estructura para el caso de carga (b).

En este caso no es necesario descomponer la carga al ser ya vertical:

$$(+\rightarrow)\sum F_h = H_b = 0 \tag{1.22a}$$

$$(+\uparrow)\sum F_v = V_a + V_b - 20\text{ kN} = 0 \tag{1.22b}$$

$$(+\circlearrowleft)\sum M_a = 2\sqrt{3}\text{ m } \cdot V_b - 20\text{ kN} \cdot \sqrt{3}\,m = 0 \tag{1.22c}$$

Despejando, obtenemos el valor de las reacciones:

$$V_a = 10\text{ kN}(\uparrow) \tag{1.23a}$$

$$H_b = 0 \tag{1.23b}$$

$$V_b = 10\text{ kN}(\uparrow) \tag{1.23c}$$

Caso de carga (c): Tenemos una carga distribuida uniforme...:

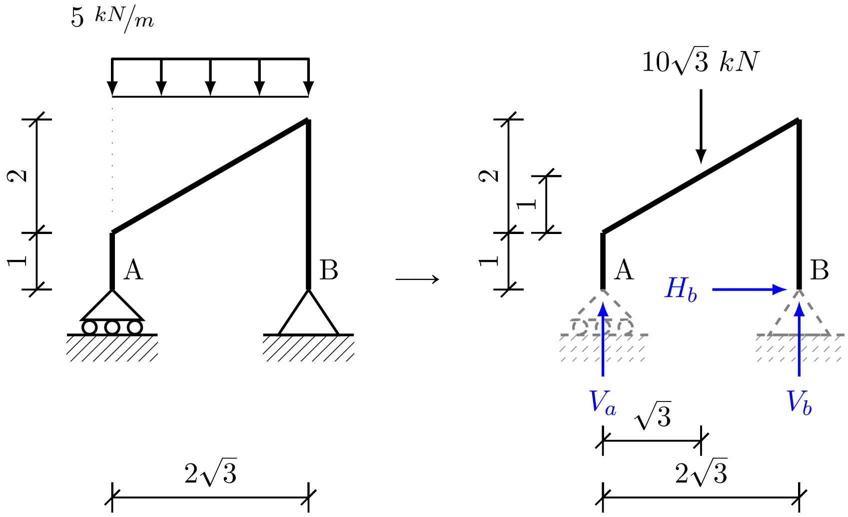


Figura 1.15: Diagrama de cuerpo libre de la estructura para el caso de carga (c).

Por último, este caso es idéntico al anterior pero con un valor distinto de la carga concentrada equivalente en dirección vertical:

$$(+\rightarrow)\sum F_h = H_b = 0 \tag{1.24a}$$

$$(+\uparrow)\sum F_v = V_a + V_b - 10\sqrt{3}\ \text{kN} = 0 \tag{1.24b}$$

$$(+\circlearrowleft)\sum M_a = 2\sqrt{3}\ \text{m}\ \cdot V_b - 10\sqrt{3}\ \text{kN}\cdot\sqrt{3}\ m = 0 \tag{1.24c}$$

Despejando, obtenemos el valor de las reacciones:

$$V_a = 5\sqrt{3}\ \text{kN}(\uparrow) \tag{1.25a}$$

$$H_b = 0 \tag{1.25b}$$

$$V_b = 5\sqrt{3}\ \text{kN}(\uparrow) \tag{1.25c}$$

1.3. Ejercicios propuestos

Para cada una de las siguientes estructuras, determinar su hiperestatismo interno, externo y global, así como el valor de todas las reacciones en los apoyos para aquellas estructuras que sean globalmente isostáticas.

1.3.1. Ejercicio propuesto 1

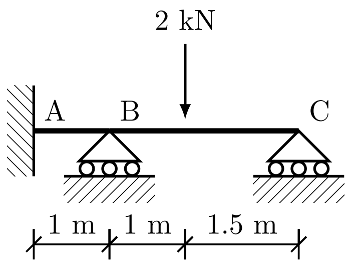


Figura 1.16

1.3.2. Ejercicio propuesto 2

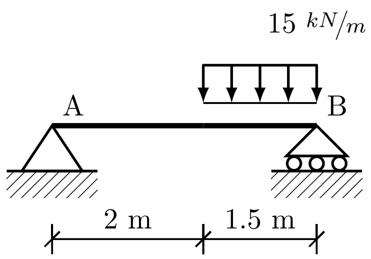


Figura 1.17

1.3.3. Ejercicio propuesto 3

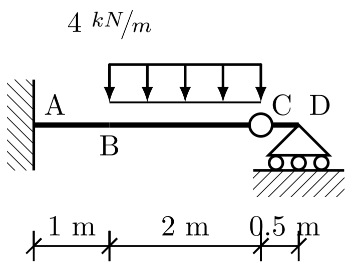


Figura 1.18

1.3.4. Ejercicio propuesto 4

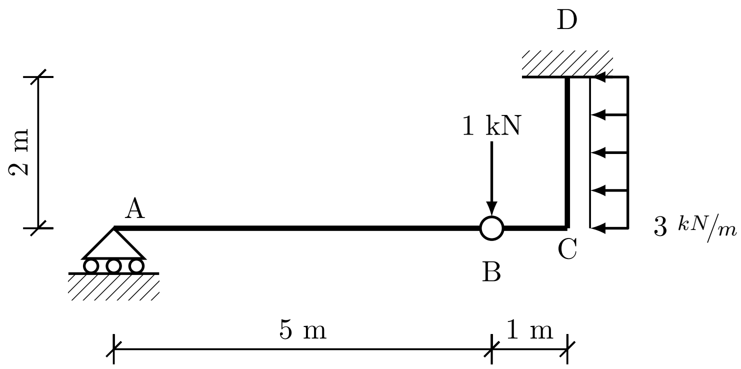


Figura 1.19

1.3.5. Ejercicio propuesto 5

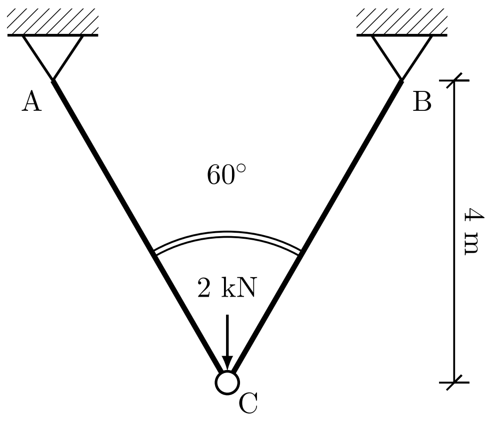


Figura 1.20

1.3.6. Ejercicio propuesto 6

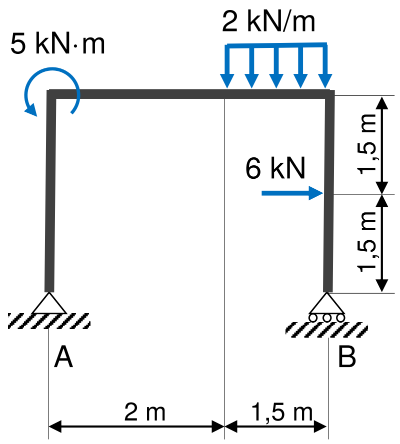


Figura 1.21

1.3.7. Ejercicio propuesto 7

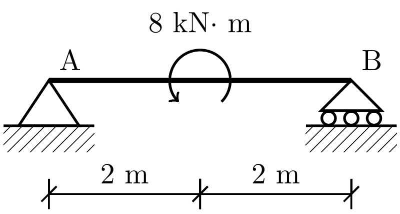


Figura 1.22

1.3.8. Ejercicio propuesto 8

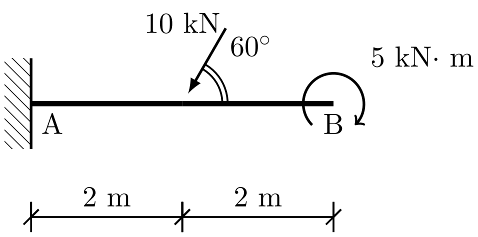


Figura 1.23

1.3.9. Ejercicio propuesto 9

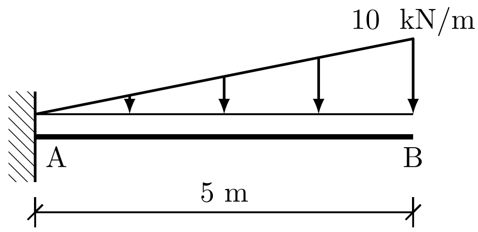


Figura 1.24

1.3.10. Ejercicio propuesto 10

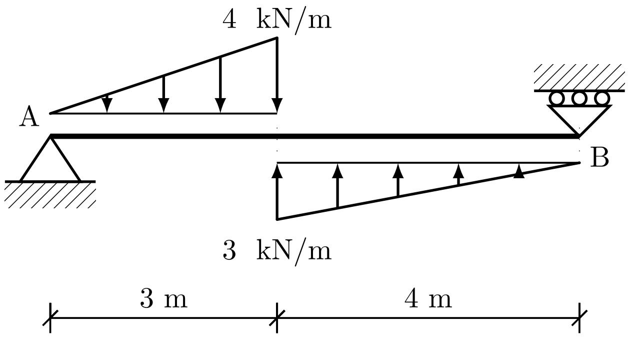


Figura 1.25

1.3.11. Ejercicio propuesto 11

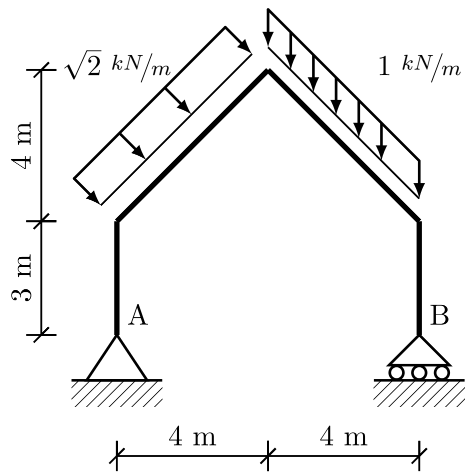


Figura 1.26

1.3.12. Ejercicio propuesto 12

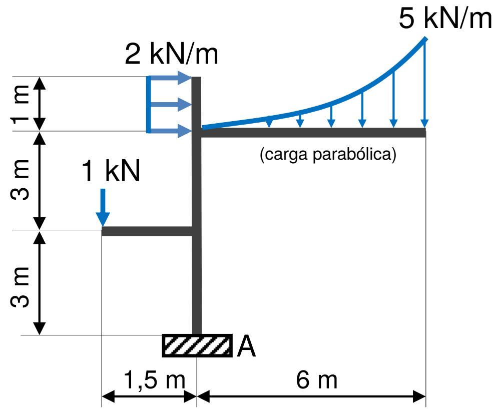


Figura 1.27

1.3.13. Ejercicio propuesto 13

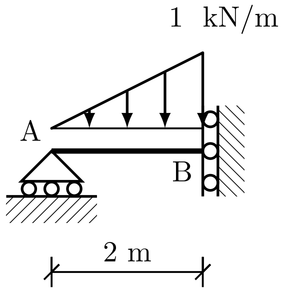


Figura 1.28

1.3.14. Ejercicio propuesto 14

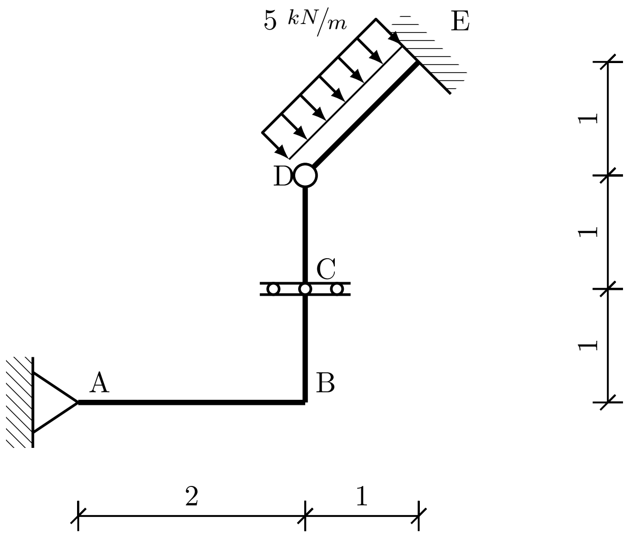


Figura 1.29: Cotas en metros.

1.3.15. Ejercicio propuesto 15

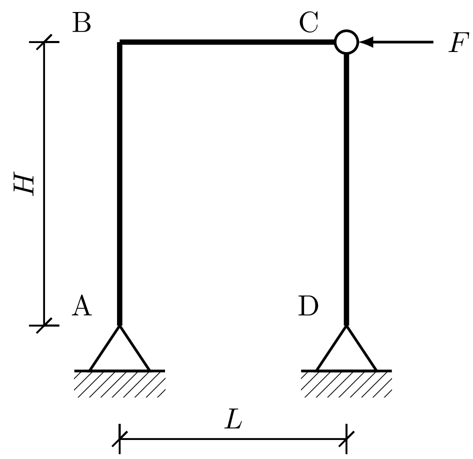


Figura 1.30

1.3.16. Ejercicio propuesto 16

Nota: la fuerza F hace 45° con la horizontal.

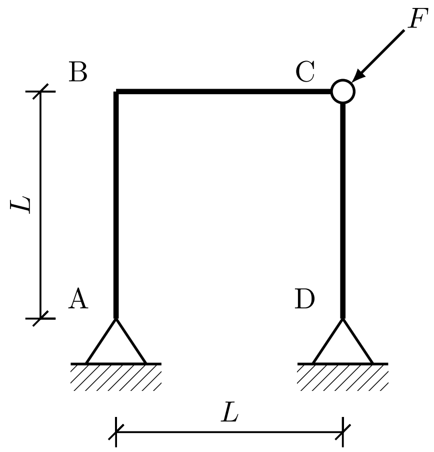


Figura 1.31

1.4. Solución de los ejercicios propuestos

Ejercicio 1: $GHE = 2$, $GHI = 0$ y $GH = 2$: reacciones no resolubles sólo con ecuaciones de la estática.

Ejercicio 2: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 4.82$ kN(↑), $V_B = 17.68$ kN(↑).

Ejercicio 3: $GHE = 1$, $GHI = -1$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 8$ kN(↑), $M_A = 16$ kN·m (↺), $V_D = 0$.

Ejercicio 4: $GHE = 1$, $GHI = -1$, $GH = 0$. Reacciones: $V_A = 0$, $V_D = 1$ kN(↑), $H_D = 6$ kN(→), $M_D = 5$ kN·m (↻)

Ejercicio 5: $GHE = 1$, $GHI = -1$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0.577$ kN(←), $V_A = 1$ kN(↑), $H_B = 0.577$ kN(→), $V_B = 1$ kN(↑).

Ejercicio 6: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 6$ kN(←), $V_A = 0.5$ kN(↓), $V_B = 3.5$ kN(↑).

Ejercicio 7: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 2$ kN(↑), $V_B = 2$ kN(↓).

Ejercicio 8: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 5$ kN(→), $V_A = 8.66$ kN(↑), $M_A = 22.32$ kN·m (↺).

Ejercicio 9: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 25$ kN(↑), $M_A = 25 \cdot \frac{2}{3}5 = 83.33$ kN·m (↺).

Ejercicio 10: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 2$ kN(↑), $V_B = 2$ kN(↓).

Ejercicio 11: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 5.66$ kN(←), $V_A = 2.12$ kN(↑), $V_B = 9.19$ kN(↑).

Ejercicio 12: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 2$ kN(←), $V_A = 11$ kN(↑), $M_A = 56.5$ kN·m (↺).

Ejercicio 13: $GHE = 0$, $GHI = 0$, $GH = 0$. Reacciones: $V_A = 1$ kN(↑), $H_B = 0$, $M_B = 4/3$ kN·m (↺).

Ejercicio 14: $GHE = 2$, $GHI = -2$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = 0$, $V_A = 0$, $H_E = 5$ kN(←), $V_E = 5$ kN(↑), $M_E = 5$ kN·m (↻).

Ejercicio 15: $GHE = 1$, $GHI = -1$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = F(\rightarrow)$, $V_A = F\frac{H}{L}(\uparrow)$, $H_D = 0$, $V_D = F\frac{H}{L}(\downarrow)$.

Ejercicio 16: $GHE = 1$, $GHI = -1$, $GH = 0$. Reacciones: $H_A = \frac{F}{\sqrt{2}}(\rightarrow)$, $V_A = \frac{F}{\sqrt{2}}(\uparrow)$, $H_D = 0$, $V_D = 0$.