

Análisis estático de estructuras por el método matricial

José Luis Blanco Claraco
Antonio González Herrera
José Manuel García Manrique

Departamento de Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación
Universidad de Málaga

JOSÉ LUIS BLANCO CLARACO,
ANTONIO GONZÁLEZ HERRERA,
JOSÉ MANUEL GARCÍA-MANRIQUE OCAÑA

*ANÁLISIS ESTÁTICO DE
ESTRUCTURAS POR EL
MÉTODO MATRICIAL*



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

Análisis estático de estructuras por el método matricial

José Luis Blanco Claraco

Antonio González Herrera

José Manuel García-Manrique Ocaña

Departamento de Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación

Universidad de Málaga

© Los autores

© de la edición: Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico
de la Universidad de Málaga.

Colección: Manuales

ISBN: 978-84-9747-448-1

Depósito Legal: MA-1352-2012

Imprime: PUBLIDISA

Análisis estático de estructuras por el método matricial

José Luis Blanco Claraco
Antonio González Herrera
José Manuel García Manrique

Departamento de Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación
Universidad de Málaga

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción al cálculo matricial	9
1.1. Generalidades	9
1.2. Características de los métodos matriciales	10
1.3. Modelización del problema	12
1.4. Métodos de cálculo matricial	13
1.5. Ejemplo	14
1.6. Características de la matriz de rigidez	22
1.7. Rotaciones entre sistemas de coordenadas	22
2. Matrices de elementos estructurales	27
2.1. Introducción	27
2.2. Matriz de barra biarticulada (4 gdl)	28
2.2.1. Matriz de rigidez	28
2.2.2. Cambio de coordenadas	35
2.3. Matriz completa de una barra (6 gdl)	39
2.3.1. Matriz de rigidez	39
2.3.2. Cambio de coordenadas	42
2.4. Matriz completa de una barra tridimensional (12 gdl)	45
2.4.1. Matriz de rigidez	45
2.4.2. Cambio de coordenadas	48

2.5.	Condensación de grados de libertad	49
2.5.1.	El método de la condensación de la matriz de rigidez	50
2.5.2.	Barra articulada-rígida	52
2.5.3.	Barra rígida-articulada	54
3.	Método matricial de ensamblaje y resolución	57
3.1.	Introducción	57
3.1.1.	Sistemas de coordenadas	58
3.2.	Compatibilidad y equilibrio	58
3.2.1.	Ecuaciones de compatibilidad	60
3.2.2.	Ecuaciones de equilibrio	61
3.3.	Ensamblaje de la matriz de rigidez completa	62
3.4.	Condiciones de contorno	65
3.4.1.	Elementos de sustentación: apoyos	65
3.4.2.	Cargas nodales	65
3.5.	Estrategia de resolución del sistema de ecuaciones	66
3.6.	Cálculo de esfuerzos en barras	71
4.	Situaciones particulares de cálculo	77
4.1.	Determinación de gdl en nudos y “orlado” de matrices de rigidez	77
4.2.	Simplificaciones debidas a simetría	83
4.3.	Desplazamientos impuestos y asientos	85
4.4.	Cargas a lo largo de las barras	88
4.5.	Cargas de temperatura en barras	94
4.6.	Elementos “muelle”	98
4.7.	Apoyos móviles no ortogonales	103
4.8.	Simplificación de barras por muelles	108
4.9.	Comprobación del equilibrio de esfuerzos, acciones y reacciones	121
5.	Problemas resueltos	125
5.1.	Problema 1 (estructura articulada simple)	125
5.2.	Problema 2 (con barras rígido-articuladas)	136
5.3.	Problema 3 (simplificaciones y deslizadera)	152

A. Resistencia de materiales: prontuario básico

161

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO MATRICIAL

1.1. Generalidades

Los métodos de cálculo matricial (CM) de estructuras son un conjunto de métodos que tienen en común organizar toda la información en forma de matrices. En estos métodos, todas las relaciones entre las distintas partes de una estructura dan lugar a sistemas de ecuaciones con un alto número de variables pero donde no se han realizado suposiciones o simplificaciones en las que se pierda información relevante. Esta generalidad, junto a la estructura de la información en matrices, permite que su planteamiento y resolución pueda ser ejecutada de manera automática por medio de programas de ordenador, lo que ha hecho que en la actualidad sean la práctica habitual en la ingeniería.

En el presente texto se va a desarrollar el denominado método de la rigidez de cálculo matricial, aplicado a estructuras bidimensionales formadas por barras y vigas. Este mismo esquema puede ser extendido a otras formas de discretizar una estructura o un medio continuo. De hecho, el método de los Elementos Finitos es la extensión del método de CM donde se trata con elementos que no son sólo barras, sino volúmenes de distintas formas geométricas que modelan un mayor número de pro-

blemas mecánicos o físicos.

En todo el desarrollo del método aceptaremos las hipótesis generales en las que normalmente se desarrolla la Teoría de Estructuras, esto es, comportamiento elástico y lineal del material y estado de pequeños desplazamientos.

1.2. Características de los métodos matriciales

En primer lugar es interesante hacer un breve análisis de diversas características que presentan estos métodos frente a los clásicos de cálculo de estructuras:

- **Generalidad:** Puesto que todas las ecuaciones que describen el comportamiento de la estructura son implementadas en el problema, el CM se puede considerar un método de cálculo general, no está limitado por la aplicación del mismo a una tipología de estructura particular. Esto contrasta con los métodos para estructuras articuladas, en los que se exige que todos los nudos puedan considerarse como articulados, así como con el método de Cross, donde se asume que los efectos de acortamiento de barras son despreciables.
- **Conocimiento:** La aplicación del CM, una vez que sus relaciones ya han sido desarrolladas, requiere un nivel de conocimiento para el operador mucho más básico. No es necesario entender el sentido físico de estas relaciones para aplicarlas. Los métodos particulares exigen un conocimiento preciso del problema estructural a tratar y una toma de decisiones continua sobre la influencia de diversos aspectos con el fin de simplificarlos. En el CM, al no tener que evaluar hipótesis o estimar efectos despreciables sobre el resultado final, la aplicación es directa.
- **Número de ecuaciones:** La diferencia fundamental radica en el número de ecuaciones que intervienen en la resolución del problema. En CM intervienen todas, no se descarta ninguna incluso aunque a priori se pueda estimar que su influencia pueda ser despreciable. El método está establecido de manera que automática-

mente se tengan en cuenta todos los efectos. La potencialidad de los métodos particulares radica en limitarse a aplicar las ecuaciones significativas con lo que se llegaba a una solución muy aproximada a la real pero con un coste de tiempo y de cálculo mucho menor.

- **Velocidad de cálculo:** Al incluirse todas las ecuaciones en CM, el tiempo de cálculo es mucho mayor por lo que, conocidas sus ecuaciones desde hace varios siglos, no han resultado útiles y de aplicación práctica hasta mediados del siglo XX. Los métodos particulares estaban desde el principio establecidos para poder aplicarse de manera manual y rápida, bien con ayuda de algún elemento de cálculo (reglas de cálculo) o incluso de manera gráfica (métodos de Maxwell-Cremona, Williot, etc.).
- **Sentido físico del problema:** Durante la aplicación de los métodos particulares (articuladas y Cross) se puede entender y seguir sin grandes dificultades el comportamiento estructural del sistema. Esta es la razón por la que se siguen enseñando en las materias de Teoría y Cálculo de Estructuras: tienen un valor didáctico para comprender el comportamiento de estructuras. Sin embargo, en el CM tenemos finalmente un conjunto de números ordenados en matrices, que tienen una significación pero a la que puede costar más establecer su correspondiente con las características visibles de la estructura.
- **Automatización del método:** Esta es una característica derivada de las anteriores y termina siendo la razón fundamental por la que los métodos matriciales son los que se han implantado actualmente, en particular el denominado método de la rigidez (que se desarrollará en los próximos capítulos). La generalidad del método y el hecho de que se implementen todas las ecuaciones, reducen al mínimo las decisiones previas para modelar el problema matemáticamente. Si se organiza la información de manera que se puedan seguir pasos repetitivos para cada elemento (barra) que intervenga en la estructura, es muy fácil desarrollar un algoritmo de aplicación automática para todos los casos. En eso consiste el

método matricial de la rigidez, y tiene como consecuencia que sea muy sencillo implementar programas de ordenador para aplicar el método. Con ello se salva la principal limitación en cuanto a la necesidad de resolución de grandes sistemas de ecuaciones y permite explotar todas las ventajas adicionales que tiene el CM.

1.3. Modelización del problema

Aunque el cálculo matricial está pensado para que las ecuaciones finales las resuelva un ordenador, existe un paso fundamental que es responsabilidad del calculista y que no podrá ser realizada por un ordenador. Se trata de la modelización matemática del problema y de su correcta discretización. El cálculo puede estar bien realizado pero de nada sirve si el problema no responde a la realidad que pretendemos representar.

En CM, el proceso de modelado y discretización, aunque siempre esta presente en los otros métodos de cálculo de estructuras, en este caso es mucho mas explícito y repercute de manera muy directa en los resultados que podemos extraer.

El concepto de discretización debe ser establecido de manera precisa. Consiste en la representación del comportamiento de un medio continuo (la estructura) por medio de un conjunto finito de variables, en nuestro caso fuerzas aplicadas sobre el sólido y desplazamientos. Este número finito de variables son los desplazamientos en cada uno de los grados de libertad (gdl) de un sistema.

Determinar dichos grados de libertad y establecer todas sus relaciones son el punto de partida a partir del cual se resolverá el problema. El CM sólo aportará información en esos gdl, cualquier información adicional exigirá un paso adicional de interpretación de los resultados directos.

Para cada gdl, existirá una variable en fuerza y otra en desplazamiento. De ellas, una estará determinada por las condiciones de contorno (de

carga o de desplazamiento impuesto) y la otra será la incógnita a despejar. En caso de ser incógnita de fuerza estaremos hablando de reacciones. Tanto los esfuerzos como cualquier incógnita interna de deformaciones, alargamientos o desplazamientos de puntos internos diferentes de los grados de libertad definidos en el problema deberán ser derivados posteriormente a partir de los resultados directos obtenidos en cada gdl definido.

1.4. Métodos de cálculo matricial

En términos generales, existen dos procedimientos genéricos en mecánica de medios continuos de sólidos deformables para poder establecer el sistema completo de ecuaciones dependiendo del orden en que las vayamos aplicando.

Las ecuaciones que podemos poner en juego son las *ecuaciones de equilibrio*, las de *comportamiento* y las de *compatibilidad* del problema. Cuando partiendo de las ecuaciones de equilibrio las utilizamos para incorporarlas a las de comportamiento y finalmente el resultado lo introducimos en las ecuaciones de compatibilidad, estamos aplicando el método denominado de la compatibilidad o de la flexibilidad. Hablando en términos de las variables implicadas, en este caso llegamos a formular los desplazamientos en función de las cargas aplicadas.

Si seguimos el procedimiento inverso, inicialmente relacionamos deformaciones y desplazamientos aplicando las ecuaciones de compatibilidad para posteriormente aplicar las leyes de comportamiento y finalmente las ecuaciones de equilibrio, en ese caso el método se denomina de la rigidez o del equilibrio. En la Figura 1.4.1 se esquematiza brevemente este proceso.

En cálculo matricial, tal y como se verá a continuación en un ejemplo, es posible aplicar ambos procedimientos. Sin embargo, tal y como se desarrollará en los capítulos siguientes, únicamente es posible llegar a un procedimiento automático y sistematizado con el método de la rigidez, siendo este por tanto el que se ha implantado y generalizado.

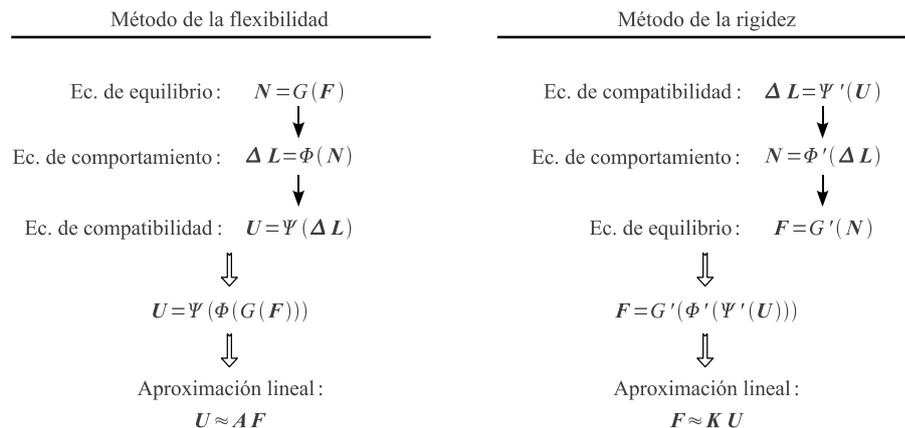


Figura 1.4.1: Los dos caminos alternativos para plantear las ecuaciones que modelan una estructura: el método de la flexibilidad y el de la rigidez. Las funciones G , Φ , Ψ y G' , Φ' , Ψ' son nombres simbólicos de funciones diferentes cuya forma exacta no es relevante aquí.

1.5. Ejemplo

A continuación se va a desarrollar un ejemplo donde se puede ver la aplicación de ambos métodos a un mismo problema y como éste se puede estructurar en forma matricial.

El problema a estudiar es un problema clásico de resistencia de materiales, se trata de una viga en voladizo como la mostrada en la Figura 1.5.1.

El primer paso que habrá que dar es la discretización del problema. Tenemos diversas opciones de discretización, todas ellas válidas. Algunas opciones se muestran en la parte derecha de la Figura 1.5.1. Se puede ver que incluso el número de gdl es variable. A mayor número de gdl, mayor detalle de resultados a cambio de un problema mas voluminoso y con mayor tiempo de cálculo. Por cuestiones de claridad en la presentación decidimos escoger una de las más sencillas: la que aparece en la última fila de la Figura 1.5.1.

El problema estará representado únicamente por tres gdl asociados

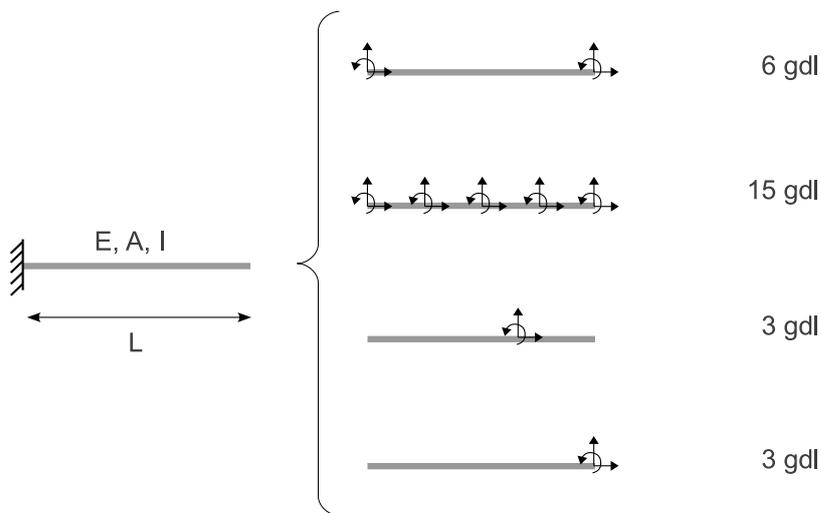


Figura 1.5.1: (Izquierda) Ejemplo de problema para estudio por los métodos matriciales de flexibilidad y de la rigidez. (Derecha) Algunas de las opciones posibles para la discretización del problema, donde se indican los gdl elegidos para que entren en el modelo del sistema.

al desplazamiento horizontal y vertical del extremo y a su giro. Esta elección nos limita el tipo de problemas que podremos resolver con esta discretización, por ejemplo, las cargas solo podrán estar aplicadas en ese extremo.

Una vez discretizado el problema, empezamos obteniendo su correspondiente matriz de rigidez \mathbf{K} , que relaciona las solicitaciones $\vec{\mathbf{F}}$ y desplazamientos $\vec{\mathbf{U}}$ de manera que:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

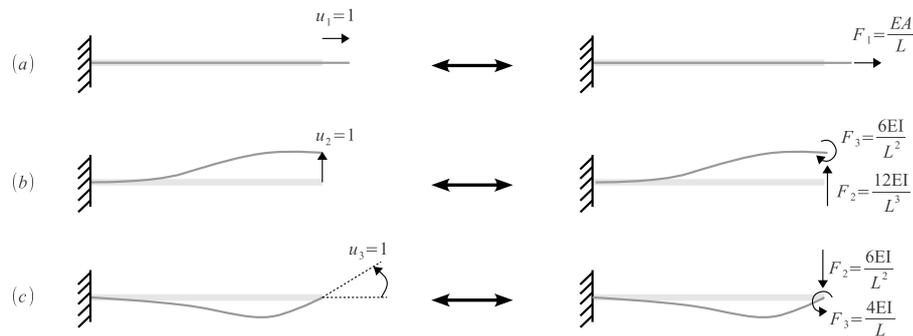


Figura 1.5.2: Ejemplo de cálculo de matriz de rigidez mediante problemas unitarios. Los desplazamientos y cargas positivos se realizan en las direcciones +X y +Y, siendo los giros y momentos positivos en sentido contrario a las agujas del reloj.

donde podemos obtener los valores de la matriz (los números K_{ij}) por el método de inspeccionar cada uno de los problemas unitarios, uno por gdl. Dicho método consiste en plantear los problemas que corresponden con un vector de desplazamiento nulo en todos los gdl menos en uno (donde habrá un desplazamiento unitario) y calcular las solicitaciones asociadas a dicho desplazamiento. Los valores de esfuerzos así obtenidos se colocan en la columna correspondiente al gdl en el que se aplicó el desplazamiento, y así, columna a columna, se puede obtener la matriz completa.

Para el caso del ejemplo anterior, los tres problemas unitarios se corresponderían a los desplazamientos unitarios (uno por cada gdl) representados en la Figura 1.5.2. Si tomamos los esfuerzos de cada uno de dichos problemas unitarios, podemos ir formando la matriz de rigidez columna a columna. Empecemos con el caso (a), donde $u_1 = 1$ y los otros dos desplazamientos son cero. Si ahora sustituimos en la fórmula de la Ec. 1.5.1 estos desplazamientos y los valores de las fuerzas que deberíamos aplicar para obtenerlos (ver lado derecho de la figura), tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{a}) \quad u_1 = 1$$

es decir, ya hemos determinado los tres valores de la primera columna de la matriz de rigidez. Procediendo de idéntica manera obtenemos los valores de las otras dos columnas (tomar como referencia la Figura 1.5.2):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{b}) \quad u_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{c}) \quad u_3 = 1$$

Juntando estos tres últimos resultados obtenemos la matriz de rigidez \mathbf{K} completa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Si en cambio hubiésemos elegido plantear el problema mediante la matriz de flexibilidad \mathbf{A} , que relaciona esfuerzos y desplazamientos mediante $\vec{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{F}}$ el método sería similar, planteando en este caso los distintos problemas de cargas unitarios, calculando los desplazamientos asociados a cada uno de ellos y colocando dichos desplazamientos en cada una de las columnas de la matriz de flexibilidad. El proceso se ilustra

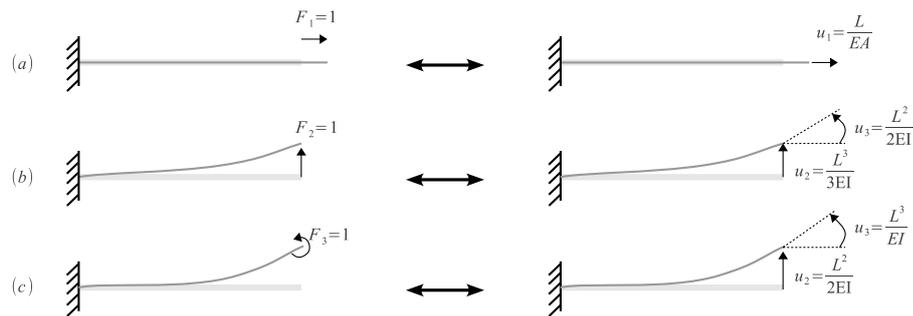


Figura 1.5.3: Ejemplo de cálculo de matriz de flexibilidad mediante problemas unitarios. Los desplazamientos y fuerzas positivos se realizan en las direcciones +X y +Y, siendo los giros y momentos positivos en sentido contrario a las agujas del reloj.

en la Figura 1.5.3, y permite crear la matriz columna a columna de esta manera:

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{a}) \quad F_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L^3}{3EI} \\ \frac{L^2}{2EI} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} \quad (\text{b}) \quad F_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^3}{EI} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{c}) \quad F_3 = 1$$

con lo que ya tenemos el valor de la matriz de flexibilidad al completo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{EI} \end{bmatrix}$$

Una vez hayamos obtenido la matriz de rigidez o de flexibilidad de una estructura, tan simple como la de este ejemplo o arbitrariamente compleja, podemos resolver cualquier problema que combine gdl con desplazamientos conocidos (apoyos, asientos, etc...) con gdl libres cuyos desplazamientos sean incógnitas. Dependiendo de las variables podría ser mejor aplicar un método u otro, aunque en general los gdl conocidos y las incógnitas estarán intercalados y por tanto siempre habrá que reorganizar la matriz para resolverla, no habiendo ventajas en este sentido entre los métodos de la rigidez y de la flexibilidad.

Para ilustrar como se obtendría la matriz de rigidez para una estructura más compleja, consideremos ahora el caso del pórtico de la Figura 1.5.4.

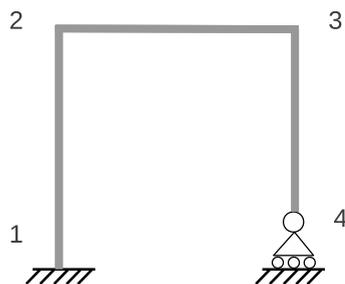


Figura 1.5.4: Ejemplo de un pórtico. Se estudiarán los gdl correspondientes a los cuatro nudos numerados en la figura.

De manera similar a los problemas de desplazamientos unitarios de la Figura 1.5.2, para este pórtico analizaríamos los 11 problemas mostrados en la Figura 1.5.5. Para cada uno de dichas situaciones, calcularíamos las fuerzas necesarias para obtener dichos desplazamientos y como vimos

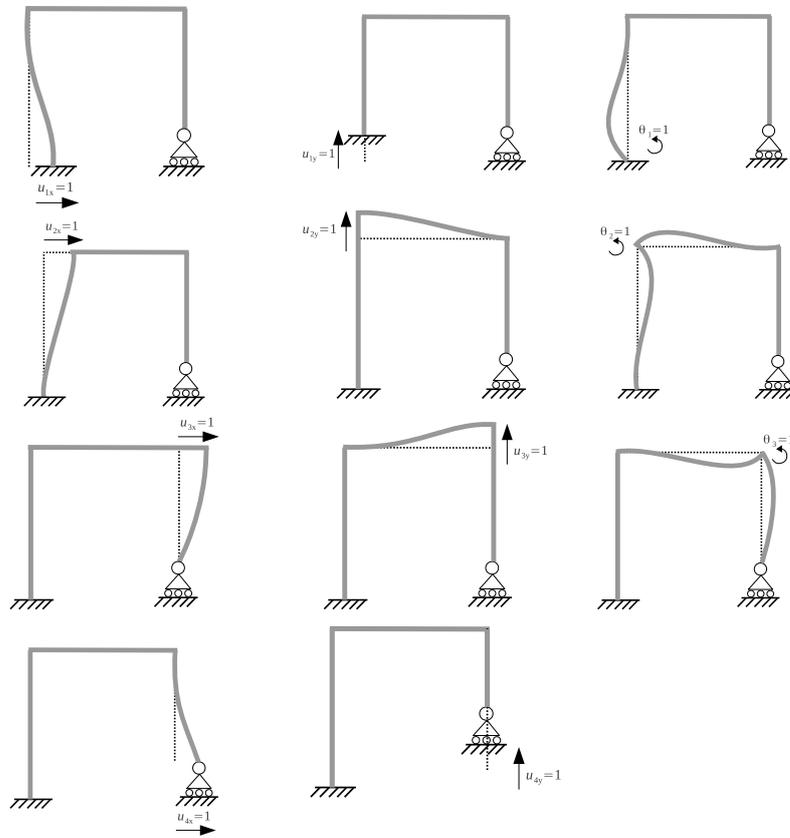


Figura 1.5.5: Los problemas unitarios correspondientes al pórtico de la Figura 1.5.4. Recordar que en cada problema solamente un gdl tiene un valor unitario, siendo nulos todos los demás desplazamientos y giros. Obsérvese que el giro del nudo 4 (el inferior a la derecha) no se ha considerado en este caso.

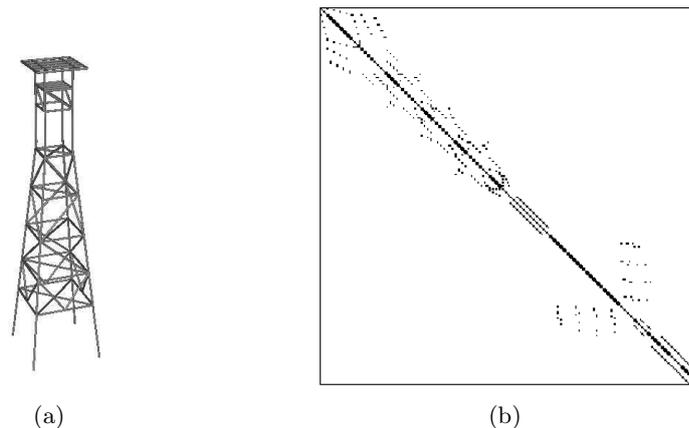


Figura 1.5.6: (a) Modelo de una torre y (b) visión esquemática de su matriz de rigidez correspondiente, donde cada elemento de la matriz se representa por un punto blanco si es cero o negro si es distinto de cero. Se observa el típico patrón de conexión disperso, con una inmensa mayoría de entradas a cero.

arriba, éstas formarían cada una de las columnas de la matriz de rigidez global de la estructura.

Obviamente, el método empleado en estos ejemplos para obtener sus correspondientes matrices \mathbf{K} y \mathbf{A} nos obliga a plantear tantos problemas elementales como gdl existan en las estructuras, por lo que no es un método práctico para estructuras no triviales. Por ello, no será éste el método a usar en casos reales, sino que se usará un método sistemático que permite ensamblar la matriz de rigidez \mathbf{K} de cualquier estructura a partir de las matrices de sus elementos, como se explicará en capítulos posteriores. La existencia de este método para el método de la rigidez y no para el de la flexibilidad es la razón por la que siempre se aborde el cálculo matricial mediante dicha formulación. Una característica típica de las matrices de rigidez, especialmente de estructuras complejas, es su gran “dispersión” (en inglés, *sparseness*), es decir: un alto porcentaje de los elementos serán típicamente ceros como se ilustra en la Figura 1.5.6.

Por último, hay que destacar nuevamente que en cálculo matricial

de estructuras no obtendremos más información que la relativa a los gdl que entran en el modelado discreto, por lo que si queremos conocer los esfuerzos a lo largo de cada elemento de la estructura debemos buscar información en otras materias (p.ej. resistencia de materiales).

1.6. Características de la matriz de rigidez

Antes de finalizar este capítulo introductorio conviene resumir aquí algunas de las principales características de las matrices de rigidez \mathbf{K} :

- La matriz de rigidez es una propiedad del sistema estructural, no cambia en función del estado de cargas o de condiciones de contorno a que se someta al estructura. Sólo se verá afectada si se introduce algún elemento adicional.
- Cada columna representa las acciones necesarias para conseguir un desplazamiento unitario en el grado de libertad definido por el índice de la columna a la vez que se quedan fijados a cero el resto de los gdl.
- Una fila es un conjunto de multiplicadores que operados sobre el vector desplazamiento completo proporcionan el valor de la fuerza correspondiente al gdl definido por el índice de la fila.
- Cada término k_{ij} se puede considerar una “función de peso” que representa la proporción de contribución a la fuerza del gdl i debido al desplazamiento del gdl j . En caso de que su valor sea cero significa que ambos gdl no está relacionados.

1.7. Rotaciones entre sistemas de coordenadas

Antes de abordar el cálculo matricial, es conveniente repasar el concepto del cambio de coordenadas de un vector en el plano, una operación omnipresente en capítulos posteriores. Consideremos un punto \mathbf{P} (o el vector desde el origen a dicho punto $\vec{\mathbf{P}}$), cuyas coordenadas en un sistema de referencia global son $\mathbf{P} = [p_x \ p_y]^\top$. Si en lugar de tener dichas

coordenadas las tuvieramos en un sistema que esté girado un ángulo ϕ con respecto al de referencia siguiendo unos nuevos ejes x' e y' , el mismo punto (o vector) tendría entonces unas coordenadas *locales* a dicho sistema que denotamos como $\mathbf{P}' = [p'_x \ p'_y]^\top$ como se ve en la siguiente figura:

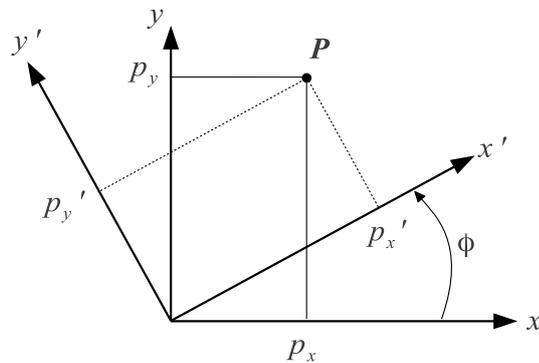


Figura 1.7.1: Un punto \mathbf{P} tiene un par de coordenadas en cada sistema de referencia (x, y) y (x', y') .

La relación entre ambos pares de coordenadas se puede establecer fácilmente mediante relaciones trigonométricas y conocido únicamente el giro ϕ (con signo positivo en la dirección contraria a las agujas del reloj, como se muestra en la figura). Respecto a la coordenada x en el sistema global (p_x), se puede ver en la Figura 1.7.2(a) como éste se obtiene restando los dos segmentos señalados, mientras que la componente en y global (p_y) está compuesta de la suma de los dos segmentos remarcados en la Figura 1.7.2(b):

Es decir, las coordenadas globales son:

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \cos \phi - p'_y \sin \phi \\ p_y &= p'_x \sin \phi + p'_y \cos \phi \end{aligned}$$

lo que no es más que una combinación lineal de las coordenadas locales. Una forma más compacta y práctica de representar dicho cambio de coordenadas es en forma matricial, de forma que queda:

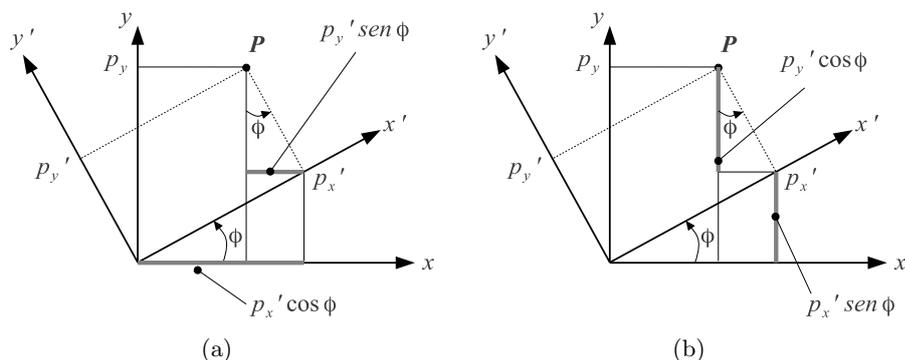


Figura 1.7.2: Las coordenadas globales de un punto se puede obtener mediante relaciones trigonométricas.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}}_{\text{Globales}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}}_{\text{Locales}} \quad (1.7.1)$$

En ocasiones no nos bastará con trabajar con un vector de desplazamiento en x e y , sino que manejaremos también un giro θ . En el contexto de cálculo matricial de estructuras, el ángulo se corresponderá con el ángulo que una barra flexa en uno de sus extremos. Dado que un ángulo de giro (un “incremento de ángulo”) no se ve afectado por la rotación del sistema de referencia, tendremos que el giro en locales θ' coincide con el giro en globales θ . En dichos casos, la matriz de rotación se modifica así para reflejar esta identidad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \theta \end{pmatrix}}_{\text{Globales}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ \theta' \end{pmatrix}}_{\text{Locales}} \quad (1.7.2)$$

A lo largo de este texto haremos uso intensivo de esta matriz de rotación elemental, por lo que es importante tener claro su significado geométrico, que ha quedado patente con las dos figuras anteriores. Por último, hacer notar que la expresión hallada nos sirve para pasar unas coordenadas locales a globales. En caso de querer realizar la conversión inversa, se puede ver a partir de la Ec. 1.7.2 que lo único que hay que hacer es multiplicar ambos lados de la ecuación por la inversa de la matriz de rotación, dándonos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ \theta' \end{pmatrix}}_{\text{Locales}} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \theta \end{pmatrix}}_{\text{Globales}} \quad (1.7.3)$$

donde se puede verificar que la inversa de la matriz de rotación es simplemente su transpuesta. Esto no es casualidad, sino una propiedad fundamental de cualquier matriz de rotación y se puede emplear para simplificar los cálculos evitando la inversión de matrices.

CAPÍTULO 2

MATRICES DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

2.1. Introducción

Dos de las características definitorias del cálculo matricial de estructuras son la sistematización y la reutilización de las submatrices de los elementos. La sistematización se refiere a que, una vez planteados, todos los problemas se pueden resolver mediante un proceso fundamentalmente repetitivo, razón por la que se ajusta tan bien a su implementación en programas de ordenador. La reutilización se refiere a que existen fórmulas bien conocidas para las matrices que modelan cada uno de los elementos que pueden aparecer en una estructura, de forma que sólo es necesario estudiar estos elementos básicos (barras o vigas) una vez para poder emplear los resultados una y otra vez en innumerables problemas.

Por ahora basta decir que modelar un elemento de una estructura (por ejemplo, una barra o un apoyo elástico) consiste en establecer qué relación existe entre los desplazamientos (y giros) que sufre en sus extremos y las solicitaciones (fuerzas y momentos) asociadas, también en los extremos. Si llamamos \vec{u} y \vec{f} a dos vectores que describen dichos desplazamientos y solicitaciones, respectivamente, se puede demostrar que para pequeñas deformaciones existe una relación lineal entre ambos, tal

que:

$$\vec{\mathbf{f}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{u}} \quad \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{f}} \quad (2.1.1)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{A} son las matrices de *rigidez* y de *flexibilidad*, respectivamente, y claramente cumplen $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$. Cualquier elemento se puede por tanto caracterizar mediante cualquiera de estas dos matrices. Sin embargo, se verá que usar las matrices de rigidez permite ensamblar la matriz de una estructura completa a partir de las matrices de sus elementos de una manera sencilla, y es por eso que se utilizarán solamente dichas matrices. Las matrices de flexibilidad no se volverán a mencionar en este texto.

Obtener las matrices de rigidez para los elementos más comunes que se encontrarán más adelante es precisamente el objetivo del presente capítulo. Se comenzará analizando el tipo más sencillo de barra (aquella cuyos dos extremos son articulados), para estudiar a continuación el caso más complejo de barra biempotrada. Se expondrán también los principios en que se basa el método de condensación de grados de libertad, el cual permite obtener las matrices de rigidez de distintos tipos de barras a partir de la matriz de comportamiento completo (6 gdl) de una barra.

2.2. Matriz de barra biarticulada (4 gdl)

2.2.1. Matriz de rigidez

Sea una barra, a la que denominaremos a , situada entre dos nudos i y j mediante uniones articuladas, en una posición arbitraria con respecto al sistema de coordenadas global del problema $\langle x, y \rangle$, tal y como se ilustra en la Figura 2.2.1, y a la que también se le asocia un sistema de coordenadas local $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ tal que \hat{x} está alineado con la dirección de la barra $i \rightarrow j$.

El vector de todas las fuerzas sobre dicha barra articulada contiene cuatro escalares: las dos componentes (x e y) para cada extremo i y j de una barra. Este vector, donde las fuerzas están expresadas en *coordenadas locales* a la barra (ver Figura 2.2.2), se denota por:

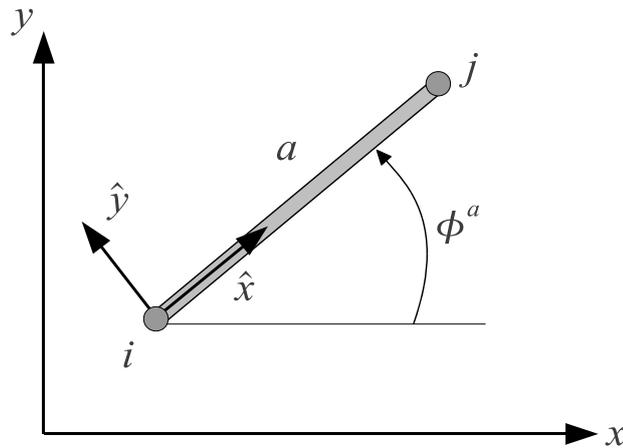


Figura 2.2.1: Notación que se usará para referirse a una barra, sus nudos y sistemas de coordenadas.

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Sobre la notación empleada, remarcar que un vector o componente cualquiera relacionado con una barra a se escribirá como \cdot^a para referirse a sus *coordenadas globales* del problema, mientras que en *coordenadas locales* se escribirá $\hat{\cdot}^a$, como en la ecuación de arriba.

En cuanto a los 4 grados de libertad (gdl) de desplazamientos, que asumimos serán pequeños para que el método de cálculo nos de una aproximación adecuada, los denotaremos por el siguiente vector en coordenadas locales:

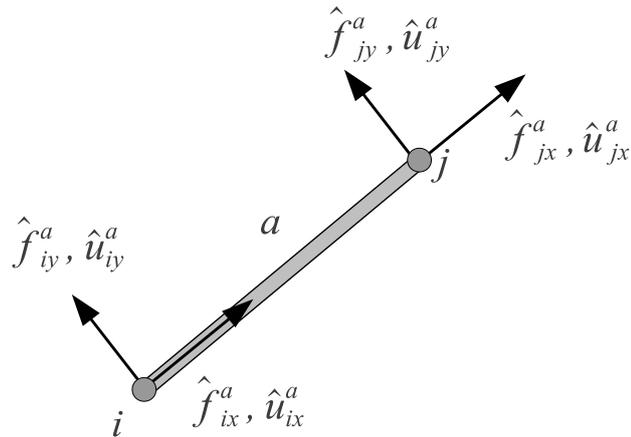


Figura 2.2.2: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas locales para una barra cuyos dos extremos son articulados.

$$\hat{\mathbf{u}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Una vez definidas las fuerzas y desplazamientos que sufre una barra a ($\hat{\mathbf{f}}^a$ y $\hat{\mathbf{u}}^a$, respectivamente), se puede demostrar fácilmente que ambos vectores están relacionados linealmente entre sí mediante una *matriz de rigidez* $\hat{\mathbf{K}}^a$, de tamaño 4×4 , que a su vez se compone de 4 submatrices de 2×2 , de forma que:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{array} \right] \hat{\mathbf{u}}^a \quad (2.2.3)$$

El significado de cada una de estas submatrices queda claro si expandimos los vectores de fuerzas y desplazamientos en sus dos elementos (para cada uno de los nudos de la barra i y j):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{f}}_i^a = \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a \hat{\mathbf{u}}_i^a + \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \hat{\mathbf{u}}_j^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a = \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a \hat{\mathbf{u}}_i^a + \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Está claro ahora que cada submatriz $\hat{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^a$ establece la relación entre los desplazamientos en el nudo β y las solicitaciones provocadas por éstos en el nudo α . Observando estas ecuaciones, y por el principio de simetría en las acciones y reacciones, se puede demostrar (ver teorema de Maxwell-Betti de resistencia de materiales) que para cualquier par i y j , las dos submatrices involucradas son la transpuesta una de otra, es decir: $\hat{\mathbf{K}}_{ij}^a = \hat{\mathbf{K}}_{ji}^{a\top}$. En el caso particular de barras articuladas es aún más sencillo, ya que $\hat{\mathbf{K}}_{ij}^a = \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a$ debido a que todos los elementos menos uno son ceros.

Por lo tanto, la matriz de rigidez de una barra particular, $\hat{\mathbf{K}}^a$ (de 4×4), se compone únicamente de dos submatrices de 2×2 distintas, dos matrices $\hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^a$ en las dos diagonales y una misma matriz $\hat{\mathbf{K}}_{\alpha\beta}^a$ en las dos esquinas, de forma que la matriz final también es simétrica.

La matriz de rigidez de una barra, o más en general de cualquier elemento o estructura, tiene una interpretación física muy ilustrativa. Para verlo, reescribiremos la Ec. 2.2.3 reemplazando la matriz de rigidez $\hat{\mathbf{K}}^a$ por sus elementos genéricos k_{ij}^a , es decir:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a$$

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & k_{13}^a & k_{14}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a & k_{23}^a & k_{24}^a \\ k_{31}^a & k_{32}^a & k_{33}^a & k_{34}^a \\ k_{41}^a & k_{42}^a & k_{43}^a & k_{44}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Entonces, se puede ver que la matriz de rigidez se puede en realidad definir como aquella matriz cuyas columnas representan las solicitaciones

asociadas a desplazamientos (y giros) unitarios. Como ejemplo, tomemos el vector de desplazamiento unitario correspondiente al eje x del nodo i , es decir $\hat{\mathbf{u}}^a = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^\top$. Usando la anterior expresión matricial obtenemos:

$$\left(\begin{array}{c} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \end{array} \right)_{u_{ix}=1} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_{11}^a & k_{12}^a & k_{13}^a & k_{14}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a & k_{23}^a & k_{24}^a \\ k_{31}^a & k_{32}^a & k_{33}^a & k_{34}^a \\ k_{41}^a & k_{42}^a & k_{43}^a & k_{44}^a \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} k_{11}^a \\ k_{21}^a \\ k_{31}^a \\ k_{41}^a \end{array} \right)$$

Se verifica que la primera columna de la matriz define las sollicitaciones asociadas a un desplazamiento unitario en el primer grado de libertad (\hat{u}_{ix} en este caso), y en general, la n 'ésima columna se corresponde con el n 'ésimo grado de libertad. Es importante tener en mente que aunque hablemos de desplazamientos y giros unitarios, en realidad se está modelando en todo momento según una aproximación de pequeños desplazamientos, a pesar de lo grandes que realmente sean los desplazamientos y giros unitarios (que si se usa el SI, serán metros y radianes, respectivamente).

Como se ilustra en la Figura 2.2.3, plantear todos los problemas unitarios permite deducir los valores de cada uno de los coeficientes de la matriz de rigidez. Este es, de hecho, una de las formas más comunes de derivar dicha matriz, y en nuestro caso concreto llegamos a:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a \quad (2.2.7)$$

$$\left(\begin{array}{c} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a & & \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a & & \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{array} \right)$$

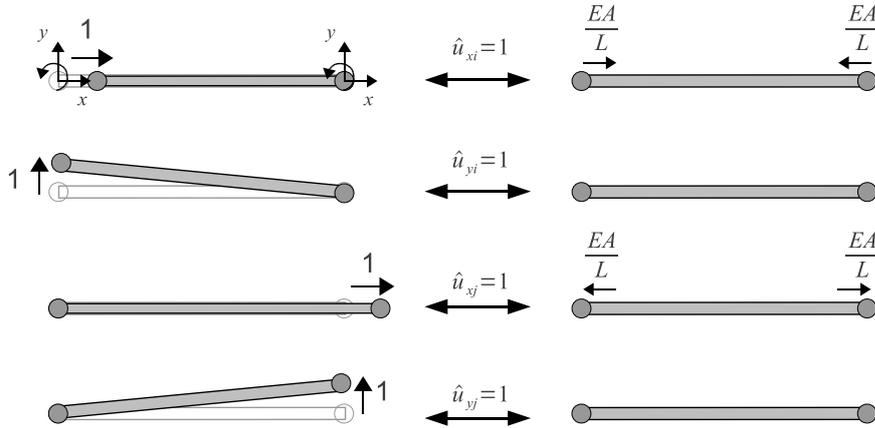


Figura 2.2.3: Los distintos desplazamientos unitarios (izquierda) en una barra biarticulada y las correspondientes solicitaciones asociadas (derecha). Nótese como en los dos casos de desplazamientos verticales no existe ninguna fuerza a pesar de la deformación que la barra parece sufrir. Esto es así porque al asumir pequeños desplazamientos el movimiento vertical no llega a aportar esfuerzo axial a la barra.

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

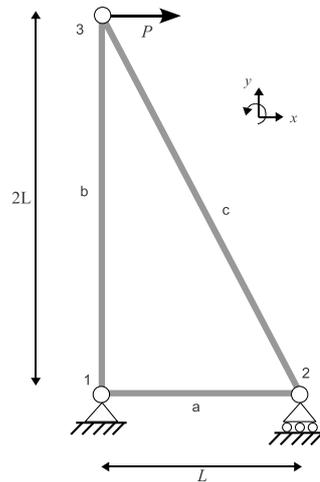
donde L es la longitud de la barra, E el módulo de elasticidad del material y A el área de su sección transversal.

Es trivial ver aquí que las solicitaciones en las direcciones perpendiculares a la barra en ambos extremos (\hat{f}_{iy}^a y \hat{f}_{jy}^a , respectivamente) serán nulas, es decir: en una barra articulada *en la que sólo se aplican cargas en sus extremos* (como se está asumiendo hasta ahora) solamente existirán fuerzas axiales, que darán lugar a tracción o compresión pero nunca a esfuerzos cortantes. En el caso de que existan cargas distribuidas sobre la barra sí que aparecerán esfuerzos tanto axiales como cortantes, como

se verá en §4.4.

UN EJEMPLO SENCILLO (1ª PARTE)

Para ilustrar los conceptos que iremos viendo a lo largo de este texto, analizaremos mediante cálculo matricial la estructura de la siguiente figura:



Donde L vale $0,5m$, y $EA = 4 \cdot 10^7 N$. Al ser todas las barras del tipo biarticuladas, ya podemos calcular sus matrices en coordenadas locales \hat{K}^a , \hat{K}^b y \hat{K}^c , sabiendo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} EA = 4 \cdot 10^7 N \\ L_a = 0,5m \\ L_b = 1m \\ L_c = 0,5\sqrt{5}m \end{array} \right.$$

y según la Ec. 2.2.7:

$$\hat{K}^a = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = 10^7 \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{K}}^b \\ \hat{\mathbf{K}}^c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] = 10^7 \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 3,578 & 0 & -3,578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,578 & 0 & 3,578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

2.2.2. Cambio de coordenadas

La sencilla expresión a la que se ha llegado arriba modela el comportamiento de una barra siempre y cuando las fuerzas y desplazamientos estén dados en coordenadas locales. En la práctica es necesario poner las variables de cada barra en un marco de coordenadas común, o coordenadas globales. Las fuerzas y los desplazamientos en coordenadas globales serán ahora denotados como los vectores \mathbf{f}^a y \mathbf{u}^a , respectivamente, como se ilustra en la Figura 2.2.4.

Para ello definimos la siguiente matriz de transformación de coordenadas:

$$\mathbf{T}^a = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2(\phi^a) & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_2(\phi^a) \end{array} \right]_{4 \times 4} \quad (2.2.9)$$

donde $\mathbf{R}_2(\phi)$ representa la matriz de rotación en el plano:

$$\mathbf{R}_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

El significado geométrico de cada una de estas matrices de rotación 2×2 es que, dado un vector $\hat{\mathbf{v}}^a$ en coordenadas locales de la barra, sus coordenadas globales son $\vec{\mathbf{v}}^a = \mathbf{R}_2(\phi)\hat{\mathbf{v}}^a$.

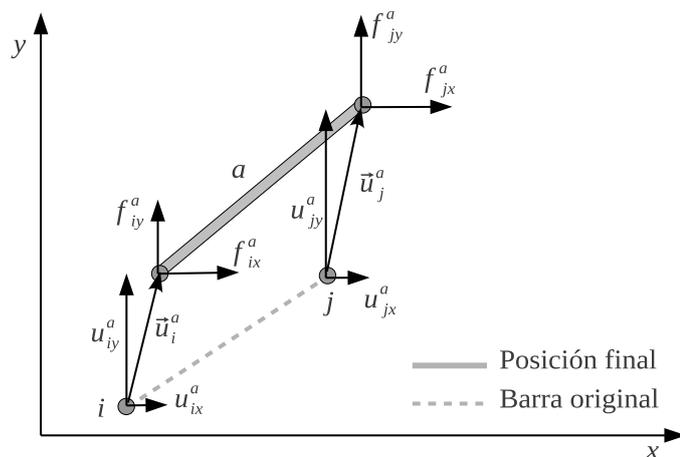


Figura 2.2.4: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas globales para una barra cuyos dos extremos son articulados. Comparar con la Figura 2.2.2.

Por lo tanto, llegamos a las siguientes expresiones que relacionan los desplazamientos y las solicitaciones en coordenadas locales y globales:

$$\vec{f}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{f}}^a \quad (2.2.11)$$

$$\vec{u}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{u}}^a \quad (2.2.12)$$

de las que, operando sobre Ec. 2.2.7, se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas globales de la barra a :

$$\mathbf{K}^a = \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}^{a\top} \quad (2.2.13)$$

dónde, usando $c = \cos \phi^a$ y $s = \sin \phi^a$:

$$\mathbf{K}^a = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array} \right] \quad (2.2.14)$$

Con todo esto, se puede escribir la ecuación de la barra en coordenadas globales (comparar con Ec. 2.2.7) como:

$$\underbrace{\vec{\mathbf{f}}^a}_{\text{Solicitaciones}} = \underbrace{\mathbf{K}^a}_{\text{Mat. rigidez}} \underbrace{\vec{\mathbf{u}}^a}_{\text{Desplazamientos}} \quad (2.2.15)$$

UN EJEMPLO SENCILLO (2ª PARTE)

(Continúa de pág.34)

En este punto ya hemos visto como convertir las matrices de rigidez de cada barra de locales a globales, para lo que necesitamos únicamente conocer la orientación de cada barra, esto es, $\phi_a = 0^\circ$, $\phi_b = 90^\circ$ y $\phi_c = 116,565^\circ$, para obtener las matrices de transformación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^a &= \begin{bmatrix} \cos \phi^a & -\sin \phi^a & 0 & 0 \\ \sin \phi^a & \cos \phi^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi^a & -\sin \phi^a \\ 0 & 0 & \sin \phi^a & \cos \phi^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}^b &= \begin{bmatrix} \cos \phi^b & -\sin \phi^b & 0 & 0 \\ \sin \phi^b & \cos \phi^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi^b & -\sin \phi^b \\ 0 & 0 & \sin \phi^b & \cos \phi^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}^c &= \begin{bmatrix} \cos \phi^c & -\sin \phi^c & 0 & 0 \\ \sin \phi^c & \cos \phi^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi^c & -\sin \phi^c \\ 0 & 0 & \sin \phi^c & \cos \phi^c \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -0,446 & -0,895 & 0 & 0 \\ 0,895 & -0,446 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,446 & -0,895 \\ 0 & 0 & 0,895 & -0,446 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Y haciendo $\mathbf{K}^a = \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}^{a\top}$, o directamente de la Ec. 2.2.14, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^a &= 10^7 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K}^b &= 10^7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}^c &= 10^7 \begin{bmatrix} 0,712 & -1,429 & -0,712 & 1,429 \\ 1,429 & 2,865 & 1,429 & -2,865 \\ -0,712 & 1,429 & 0,712 & -1,429 \\ 1,429 & -2,865 & 1,429 & 2,865 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.3. Matriz completa de una barra (6 gdl)

2.3.1. Matriz de rigidez

Consideremos ahora el caso más general de una barra a en la que estudiemos sus 6 grados de libertad (el máximo posible en 2D). Por ejemplo, se deberá emplear dicho modelo con barras en la configuración llamada “biempotrada”, es decir, con uniones rígidas en sus dos nudos extremos i y j .

Al igual que en el caso anterior, la barra podrá estar en una posición y orientación arbitraria dentro de un sistema de coordenadas global del problema $\langle x, y \rangle$, en el que definimos un sistema local de coordenadas de la barra $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ tal que \hat{x} está alineado con la dirección de la barra $i \rightarrow j$, como se ve en Figura 2.3.1.

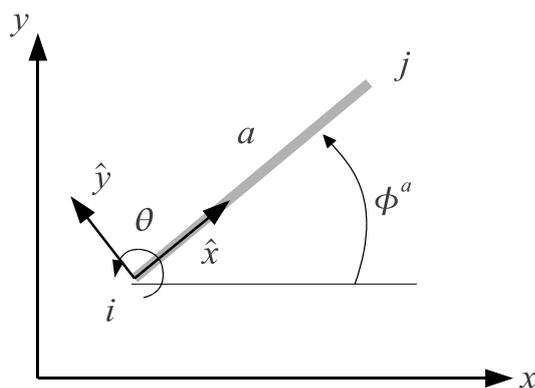


Figura 2.3.1: Sistema de coordenadas local a una barra cuyos dos extremos están empotrados.

Las solicitaciones en los extremos de dicha barra constan ahora de seis escalares: las dos componentes (x e y) de las fuerzas en cada extremo más el momento flector, también para cada extremo (ver Figura 2.3.2).

Los seis componentes, en *coordenadas locales* de la barra, se denotarán por el vector $\hat{\mathbf{f}}^a$:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ m_i^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ m_j^a \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

Hay que resaltar que en el caso de los momentos m_i^a y m_j^a no se ha usado la notación de coordenadas locales (el símbolo $\hat{\cdot}$) al ser magnitudes invariantes con el sistema de coordenadas empleado para estructuras planas.

Los desplazamientos de los extremos de la barra en este caso también tienen seis componentes: los desplazamientos propiamente dichos (direcciones x e y) y los giros θ de las secciones extremas (ver Figura 2.3.2). Todos ellos se denotan mediante el vector $\hat{\mathbf{u}}^a$, también en coordenadas locales:

$$\hat{\mathbf{u}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \theta_i^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \\ \theta_j^a \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

Se puede demostrar que, para pequeños desplazamientos, dichos desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}^a$ y las solicitaciones $\hat{\mathbf{f}}^a$ que causan están relacionados linealmente mediante la *matriz de rigidez* $\hat{\mathbf{K}}^a$, de tamaño 6×6 , formada a su vez por 4 submatrices de 3×3 , de forma que:

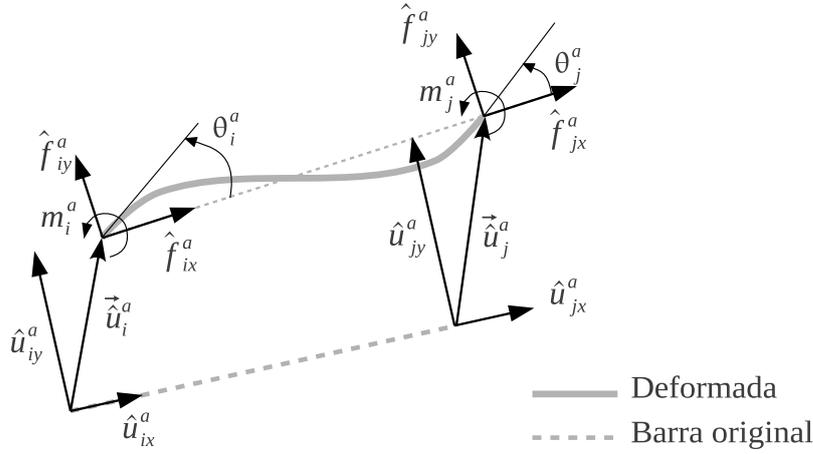


Figura 2.3.2: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas locales para una barra biempotrada.

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^a \quad (2.3.3)$$

Al igual que en la sección anterior, podemos expandir el producto de matrices, llegándose a una expresión idéntica a la Ec. 2.2.5.

Al igual que para el caso de las matrices articuladas en §2.2.1, se demuestra, invocando de nuevo el teorema de Maxwell-Betti, que para cualquier par de nudos i y j las submatrices $\hat{\mathbf{K}}_{ij}^a$ y $\hat{\mathbf{K}}_{ji}^a$ son traspuestas: $\hat{\mathbf{K}}_{ij}^a = \hat{\mathbf{K}}_{ji}^{a\top}$. Es interesante resaltar que en el caso de barras articuladas las submatrices correspondientes eran idénticas en lugar de traspuestas, pero sólo porque en ese caso las submatrices son simétricas en sí mismas, y por lo tanto, iguales a su traspuesta.

De igual manera que se hizo para una barra biarticulada, mostramos en la Figura 2.3.3 los seis problemas de desplazamientos y giros unitarios que permiten derivar el valor de la matriz de rigidez a partir de expresiones conocidas de resistencia de materiales. De esta forma, obtenemos

las seis ecuaciones (para coordenadas locales) que gobiernan una barra biempotrada:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a \quad (2.3.4)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{m}_i^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ \hat{m}_j^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \theta_i^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \\ \theta_j^a \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

donde I y A son el momento de inercia y el área de su sección transversal, respectivamente, L es la longitud de la barra y E el módulo de elasticidad del material.

2.3.2. Cambio de coordenadas

La relación establecida arriba asume que tanto las solicitaciones como los desplazamientos están dados en coordenadas locales a la barra, por lo que habrá que transformarlos a coordenadas globales del problema para poder considerar el conjunto de la estructura.

Las fuerzas y los desplazamientos en coordenadas globales serán ahora denotados como los vectores \mathbf{f}^a y \mathbf{u}^a , respectivamente, como se muestra en la Figura 2.3.4. Para el caso de una barra con sus dos nudos rígidos, definimos la siguiente matriz de transformación de coordenadas:

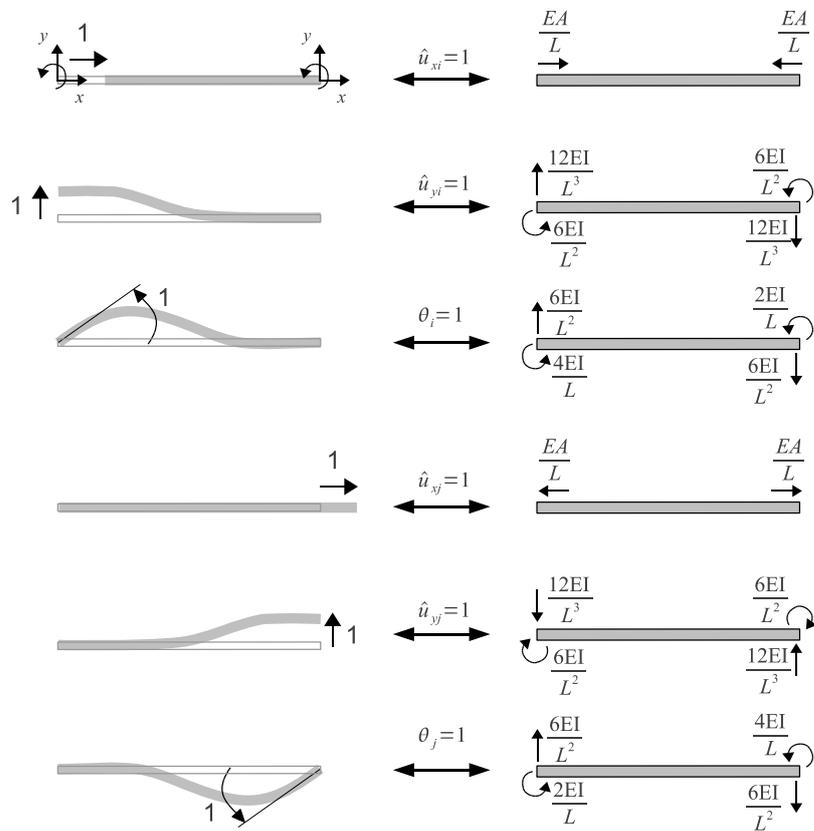


Figura 2.3.3: Los distintos desplazamientos unitarios (izquierda) en una barra biempotrada y las correspondientes solicitaciones asociadas (derecha).

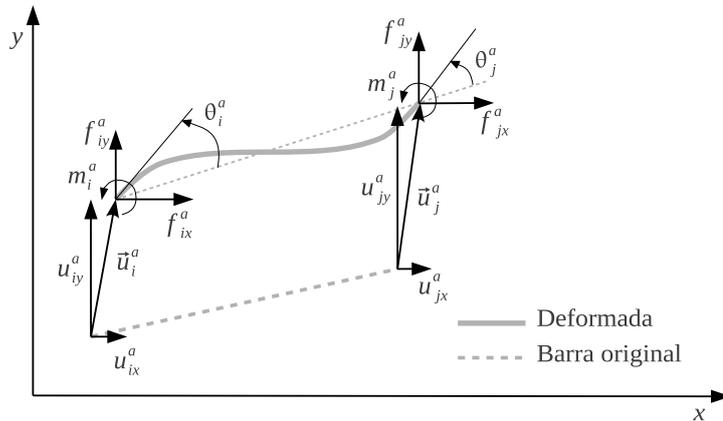


Figura 2.3.4: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas globales para una barra biempotrada. Comparar con la Figura 2.3.2.

$$\mathbf{T}^a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{R}_2(\phi^a) & 0 & & & & \\ & 0 & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \mathbf{R}_2(\phi^a) & 0 & \\ & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{6 \times 6} \quad (2.3.6)$$

donde $\mathbf{R}_2(\phi)$ representa la matriz de rotación en el plano (recordar la Ec. 2.2.10) y ϕ^a es la orientación inicial de la barra, como se vio en la Figura 2.3.1.

Llegamos a expresiones idénticas a las del caso de barras con nudos articulados que se vieron en la sección anterior:

$$\vec{\mathbf{f}}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{\mathbf{f}}}^a \quad (2.3.7)$$

$$\vec{\mathbf{u}}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{\mathbf{u}}}^a \quad (2.3.8)$$

Es importante resaltar para evitar confusiones que para cada tipo de matriz de una barra, existen distintas versiones de la matriz de rotación \mathbf{T}^a (comparar Ec. 2.2.9 y Ec. 2.3.6). Operando, se obtiene que la matriz de rigidez de la barra a en *coordenadas globales* es:

$$\mathbf{K}^a = \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}^{a\top} \quad (2.3.9)$$

Con lo que podemos escribir la ecuación de la barra en coordenadas globales como (comparar con Ec. 2.3.4):

$$\underbrace{\vec{\mathbf{f}}^a}_{\text{Solicitaciones}} = \underbrace{\mathbf{K}^a}_{\text{Mat.rigidez}} \underbrace{\vec{\mathbf{u}}^a}_{\text{Desplazamientos}} \quad (2.3.10)$$

dónde, usando $c = \cos \phi^a$ y $s = \sin \phi^a$:

$$\mathbf{K}^a = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Ac^2 + \frac{12Is^2}{L^2} & Acs - \frac{12Ics}{L^2} & -\frac{6Is}{L} & -Ac^2 - \frac{12Is^2}{L^2} & -Acs + \frac{12Ics}{L^2} & -\frac{6Is}{L} \\ Acs - \frac{12Ics}{L^2} & As^2 + \frac{12Ic^2}{L^2} & \frac{6Ic}{L} & -Acs + \frac{12Ics}{L^2} & -As^2 - \frac{12Ic^2}{L^2} & \frac{6Ic}{L} \\ -\frac{6Is}{L} & \frac{6Ic}{L} & 4I & \frac{6Is}{L} & -\frac{6Ic}{L} & 2I \\ \hline -Ac^2 - \frac{12Is^2}{L^2} & -Acs + \frac{12Ics}{L^2} & \frac{6Is}{L} & Ac^2 + \frac{12Is^2}{L^2} & Acs - \frac{12Ics}{L^2} & \frac{6Is}{L} \\ -Acs + \frac{12Ics}{L^2} & -As^2 - \frac{12Ic^2}{L^2} & -\frac{6Ic}{L} & Acs - \frac{12Ics}{L^2} & As^2 + \frac{12Ic^2}{L^2} & -\frac{6Ic}{L} \\ -\frac{6Is}{L} & \frac{6Ic}{L} & 2I & \frac{6Is}{L} & -\frac{6Ic}{L} & 4I \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

2.4. Matriz completa de una barra tridimensional (12 gdl)

2.4.1. Matriz de rigidez

A pesar de que en este texto nos centramos en el problema del cálculo matricial para estructuras planas, consideramos conveniente por completitud mostrar aquí el modelo completo de una barra en 3D.

En este caso la barra a tendrá 6 gdl en cada uno de sus dos nudos extremos i y j , tres desplazamientos y tres giros. Su orientación en el espacio podrá ser arbitraria dentro de un sistema de coordenadas global del problema $\langle x, y, z \rangle$, en el que definimos un sistema local de coordenadas de la barra $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ tal que \hat{x} está alineado con la dirección de la barra $i \rightarrow j$ y \hat{y} será normalmente uno de los dos ejes principales de su sección. De esta forma, en una barra espacial tenemos dos momentos de inercia I_y y I_z , nombrados según el eje del giro con respecto al cuál se definen. Así mismo, en lugar de un único momento (el flector M de la sección anterior), ahora tendremos dos momentos flectores M_y y M_z y un momento torsor M_x .

Siguiendo el convenio de notación de secciones anteriores, establecemos los vectores de desplazamientos y sollicitaciones en coordenadas locales como:

$$\hat{\mathbf{u}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \hat{u}_{iz}^a \\ \hat{\theta}_{ix}^a \\ \hat{\theta}_{iy}^a \\ \hat{\theta}_{iz}^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \\ \hat{u}_{jz}^a \\ \hat{\theta}_{jx}^a \\ \hat{\theta}_{jy}^a \\ \hat{\theta}_{jz}^a \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{f}}^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{iz}^a \\ \hat{M}_{ix}^a \\ \hat{M}_{iy}^a \\ \hat{M}_{iz}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ \hat{f}_{jz}^a \\ \hat{M}_{jx}^a \\ \hat{M}_{jy}^a \\ \hat{M}_{jz}^a \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

donde hay que resaltar la peculiaridad de que en las barras espaciales ya no podemos seguir asumiendo que las variables angulares (los giros

y los momentos) no varían entre coordenadas locales y globales, por lo que aquí sí que les añadiremos el símbolo $\hat{\cdot}$ para diferenciarlas.

Al igual que en secciones anteriores, podemos dividir la matriz de rigidez local en sus cuatro partes:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a \quad (2.4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_i^a \\ \hat{\mathbf{u}}_j^a \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

y usando las leyes de comportamiento de sólidos deformables podemos deducir los valores de todas las entradas de estas submatrices:

$$\hat{\mathbf{K}}_{ii}^a = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{jj}^a = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ji}^a \top = \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

donde las únicas variables no definidas hasta ahora son el momento de torsión J , el módulo de elasticidad E , el área de la sección A y el módulo de cizalladura (o de elasticidad transversal) G .

Es interesante observar cómo la matriz de comportamiento completo de una barra plana (6 gdl), vista el §2.3, se puede obtener a partir de la matriz de una barra espacial extrayendo las filas y columnas correspondientes a los gdl relevantes para una estructura plana, a saber: x , y y θ_z . Esta posibilidad existe solamente porque estas tres variables aparecen en las *ecuaciones desacopladas* de las otras tres (z , θ_x y θ_y) y por lo tanto forman un subsistema de ecuaciones independiente. Como se verá en §2.5.1, en general esto no tiene porqué ocurrir y habrá que recurrir a la técnica de la *condensación de matrices*.

2.4.2. Cambio de coordenadas

Para el caso tridimensional las matrices de rotación son una generalización de las vistas para estructuras planas. Una forma bastante extendida de representar esta matriz es en función de la matriz de cosenos directores \mathbf{R} , de forma que esta matriz \mathbf{T}^a de transformación queda:

$$\mathbf{T}^a = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{array} \right]_{12 \times 12} \quad (2.4.4)$$

con:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{\hat{x}x} & \cos \theta_{\hat{y}x} & \cos \theta_{\hat{z}x} \\ \cos \theta_{\hat{x}y} & \cos \theta_{\hat{y}y} & \cos \theta_{\hat{z}y} \\ \cos \theta_{\hat{x}z} & \cos \theta_{\hat{y}z} & \cos \theta_{\hat{z}z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (2.4.5)$$

donde el ángulo $\theta_{\hat{x}x}$ es el que forma el eje local \hat{x} con el global x , $\theta_{\hat{y}z}$ el que hace el eje local \hat{y} con el global z , y así sucesivamente.

Al igual que en secciones anteriores, estas matrices de rotación se pueden emplear para relacionar los vectores y matrices de rigidez de los sistemas locales y globales:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}^a &= \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{f}}^a \\ \vec{\mathbf{u}}^a &= \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{u}}^a \\ \mathbf{K}^a &= \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}^{a\top} \end{aligned}$$

2.5. Condensación de grados de libertad

En la sección 2.3 describimos el caso de una barra biempotrada con 6 gdl. Aunque inicialmente se introdujo el modelo de una biarticulada de 4 gdl de forma independiente, lo cierto es que a partir del modelo de biempotrada se pueden derivar los modelos de tanto la biarticulada como de cualquier otra barra con menos de 6 gdl.

En esta sección se presentarán dos ejemplos de matrices de rigidez para barras con 5 gdl, que si bien se podrían obtener planteando los problemas de deformaciones unitarios se derivarán por el método de la condensación de grados de libertad, explicado a continuación.

2.5.1. El método de la condensación de la matriz de rigidez

Sea un sistema de N grados de libertad caracterizado mediante su matriz de rigidez \mathbf{K} (de tamaño $N \times N$) que relaciona linealmente desplazamientos \mathbf{U} con solicitaciones \mathbf{F} tal que:

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = \mathbf{K}_{N \times N} \mathbf{U}_{N \times 1} \quad (2.5.1)$$

El método de condensación de grados de libertad persigue obtener, partiendo de este modelo, la matriz de rigidez correspondiente al caso de haber “eliminado” uno (o más) grados de libertad.

Eliminar n grados de libertad implica que ciertos desplazamientos o giros dejarán de aparecer en el vector \mathbf{U} , y sus correspondientes solicitaciones desaparecerán del vector \mathbf{F} , dejando por lo tanto nuestro modelo como:

$$\mathbf{F}'_{(N-n) \times 1} = \mathbf{K}'_{(N-n) \times (N-n)} \mathbf{U}'_{(N-n) \times 1} \quad (2.5.2)$$

donde evidentemente la matriz \mathbf{K}' debe ser obtenida de forma que este modelo condensado se comporte exactamente igual que el original. Es importante no perder de vista que el sistema condensado sigue correspondiendo al mismo sistema físico, donde sólo hemos impuesto alguna condición extra.

En los casos que vamos a estudiar, impondremos que las fuerzas y los momentos en los gdl condensados (los que desaparecen) sean nulos. De esta forma, si denotamos los subconjuntos de \mathbf{F} y \mathbf{U} que van a ser condensados como \mathbf{F}^c y \mathbf{U}^c , respectivamente, podemos reescribir la Ec. 2.5.1 como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{F}^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^n & \mathbf{K}^{nc} \\ \mathbf{K}^{cn} & \mathbf{K}^c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}^c \end{pmatrix} \quad (2.5.3)$$

donde los superíndices c y n usados para las submatrices indican los términos relativos a los gdl que han sido y que no han sido condensados,

respectivamente. Despejando ahora la ecuación correspondiente a \mathbf{F}^c (por simple desarrollo del producto matricial), tenemos:

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{K}^{cn}\mathbf{U}' + \mathbf{K}^c\mathbf{U}^c \quad (2.5.4)$$

y como imponemos la condición de fuerzas y momentos condensados (\mathbf{F}^c) nulos (los desplazamientos correspondientes a dichos gdl *son libres*), podemos despejar el valor de los desplazamientos y giros en dichos gdl:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{K}^{cn}\mathbf{U}' + \mathbf{K}^c\mathbf{U}^c \quad \rightarrow \\ 0 &= \mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^{cn}\mathbf{U}' + (\mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^c)\mathbf{U}^c \quad \rightarrow \\ \mathbf{U}^c &= -\mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^{cn}\mathbf{U}' \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Este resultado se puede ahora sustituir en la ecuación correspondiente a \mathbf{F}' según la Ec. 2.5.3, llegando al resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \mathbf{K}^n\mathbf{U}' + \mathbf{K}^{nc}\mathbf{U}^c \\ &= \mathbf{K}^n\mathbf{U}' - \mathbf{K}^{nc}\mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^{cn}\mathbf{U}' \\ &= \left(\mathbf{K}^n - \mathbf{K}^{nc}\mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^{cn}\right)\mathbf{U}' \quad \rightarrow \\ \mathbf{F}' &= \mathbf{K}'\mathbf{U}' \\ \text{con: } \mathbf{K}' &= \mathbf{K}^n - \mathbf{K}^{nc}\mathbf{K}^{c^{-1}}\mathbf{K}^{cn} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Como se ve, la matriz de rigidez \mathbf{K}' correspondiente al sistema condensado no se obtiene simplemente extrayendo la parte que nos interesa de la matriz original \mathbf{K} , sino que hay que restarle un término adicional que modela el efecto que tienen los gdl condensados en los demás.

En las siguientes secciones se ilustrará cómo aplicar el proceso de condensación a casos reales.

2.5.2. Barra articulada-rígida

Una barra en la que uno de sus extremos i sea articulado se caracteriza por tener 5 gdl. A diferencia del caso de barra articulada en ambos extremos §2.2, aquí sí podrían aparecer fuerzas cortantes.

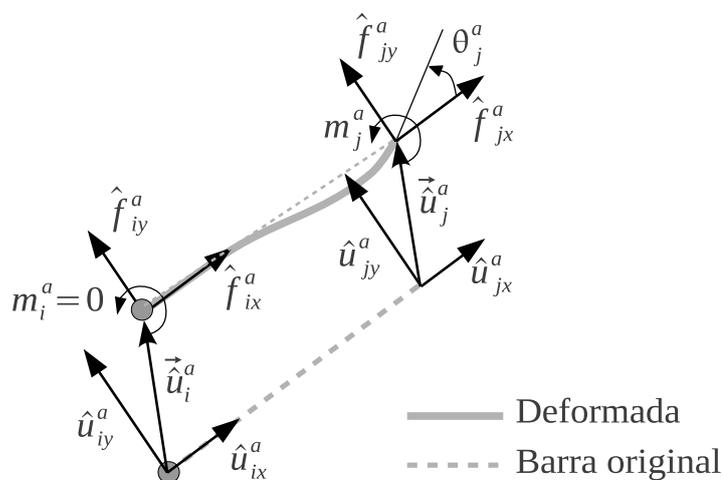


Figura 2.5.1: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas locales para una barra con el extremo i articulado y el extremo j rígido.

Partiendo de la ecuación correspondiente a una barra biempotrada, la Ec. 2.3.5, podemos obtener la matriz para una barra articulada-rígida mediante condensación del tercer grado de libertad (θ_i^a , el giro del nodo i), forzando que el momento m_i sea nulo:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ 0 \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ m_j^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \theta_i^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \\ \theta_j^a \end{pmatrix}$$

Seguindo el resultado obtenido en la Ec. 2.5.6, podemos obtener la correspondiente matriz de rigidez de 5×5 :

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ m_j^a \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{f}}^a|_{5 \times 1} = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a|_{5 \times 1} = \hat{\mathbf{K}}^a \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \\ \theta_j^a \end{pmatrix} \quad (2.5.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^a &= \hat{\mathbf{K}}^n - \hat{\mathbf{K}}^{nc} \hat{\mathbf{K}}^c^{-1} \hat{\mathbf{K}}^{cn} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \left[\frac{4EI}{L} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{array} \right] \quad (2.5.8)$$

Al igual que en anteriores modelos de barras, los vectores de sollicitaciones y desplazamientos y la matriz de rigidez en coordenadas globales se relacionan con las de coordenadas locales mediante una matriz de rotación \mathbf{T}^a propia de cada barra mediante:

$$\vec{\mathbf{f}}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{\mathbf{f}}}^a \quad \vec{\mathbf{u}}^a = \mathbf{T}^a \hat{\vec{\mathbf{u}}}^a \quad \mathbf{K}^a = \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}^{a\top} \quad (2.5.9)$$

donde, para el caso de una barra articulada-rígida con 5 gdl, tenemos:

$$\mathbf{T}^a = \left[\begin{array}{cc|ccc} \mathbf{R}_2(\phi^a) & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_2(\phi^a) & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{5 \times 5} \quad (2.5.10)$$

donde $\mathbf{R}_2(\phi)$ es la matriz de rotación ya definida en la Ec. 2.2.10 y ϕ_a es la orientación de la barra con respecto al sistema de coordenadas global.

2.5.3. Barra rígida-articulada

De manera similar al caso anterior, una barra con su extremo j articulado se caracterizará por tener 5 gdl, y porque podrán aparecer fuerzas cortantes.

Hay que resaltar que aunque la matriz de rigidez de esta barra también sea de tamaño 5×5 como en el caso anterior, las matrices son

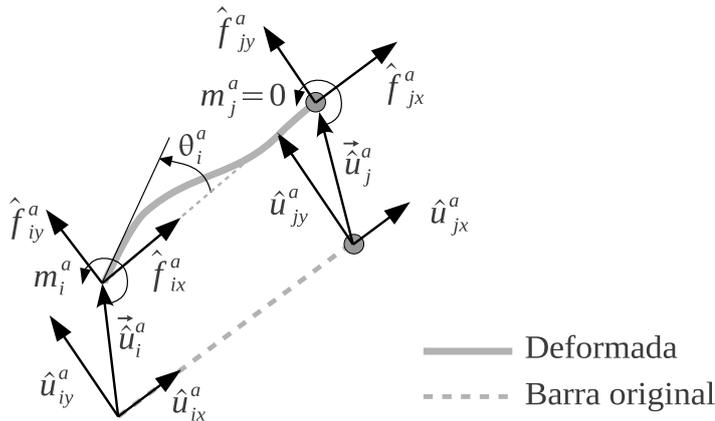


Figura 2.5.2: Esquema de las fuerzas y desplazamientos en coordenadas locales para una barra con el extremo i rígido y el extremo j articulado.

diferentes, por lo que hay que tener muy claro cuál hay que utilizar en cada problema.

Volviendo a usar el resultado de la Ec. 2.5.6, condensando esta vez los efectos del giro en θ_j^a y forzando a que el momento m_j^a sea cero, podemos obtener el valor de la matriz de rigidez de 5×5 para este tipo de barras:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ m_i^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{f}}^a|_{5 \times 1} = \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{u}}^a|_{5 \times 1} = \hat{\mathbf{K}}^a \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^a \\ \hat{u}_{iy}^a \\ \theta_i^a \\ \hat{u}_{jx}^a \\ \hat{u}_{jy}^a \end{pmatrix} \quad (2.5.11)$$

$$\hat{\mathbf{K}}^a = \hat{\mathbf{K}}^n - \hat{\mathbf{K}}^{nc} \hat{\mathbf{K}}^c^{-1} \hat{\mathbf{K}}^{cn}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{array} \right] \\
&- \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \end{array} \right] \left[\frac{4EI}{L} \right]^{-1} \left[0 \quad \frac{6EI}{L^2} \quad \frac{2EI}{L} \quad 0 \quad -\frac{6EI}{L^2} \right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array} \right] \quad (2.5.12)
\end{aligned}$$

En el caso de una barra rígida-articulada, la matriz de rotación es:

$$\mathbf{T}^a = \left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{R}_2(\phi^a) & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_2(\phi^a) & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right]_{5 \times 5} \quad (2.5.13)$$

donde $\mathbf{R}_2(\phi)$ es la matriz de rotación definida en la Ec. 2.2.10 y ϕ_a es la orientación de la barra.

CAPÍTULO 3

MÉTODO MATRICIAL DE ENSAMBLAJE Y RESOLUCIÓN

3.1. Introducción

El objetivo de esta sección es describir cómo las matrices de rigidez de los elementos (barras) individuales se ensamblan para formar la matriz de rigidez global \mathbf{K} de una estructura, de forma que se pueda plantear el sistema de ecuaciones correspondiente a la estructura completa:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}} \quad (3.1.1)$$

y posteriormente despejar el valor de las variables desconocidas, ya sean desplazamientos y giros de nudos libres o reacciones en los apoyos.

En primer lugar, la sección 3.2 expondrá la justificación teórica de dicho método de ensamblaje, describiéndose a continuación el procedimiento para realizar el ensamblaje en sí de forma sistemática. Una vez montada la matriz global de la estructura, se expondrán cómo tener en cuenta las condiciones de contorno (apoyos y cargas externas) y se propondrá un método de resolución basado en una partición en grados de libertad libres y restringidos.

3.1.1. Sistemas de coordenadas

Antes de comenzar a plantear y resolver problemas de cálculo de estructuras por este método es muy importante tener claro que vamos a tratar con tres sistemas de coordenadas distintos, como se ve en la Figura 3.1.1, cada uno de ellos empleado en un momento de la resolución:

- **Un sistema de referencia global:** Salvo excepciones, es en este sistema de coordenadas en el que se referirán las reacciones, solicitaciones y desplazamientos de la estructura en los nudos (ver §3.3).
- **Sistemas locales:** Existe un sistema de coordenadas locales asociado a cada barra de la estructura, de forma que su eje x positivo va desde el nodo inicial al final y por lo tanto su orientación depende de la conectividad que se decida para cada barra. Ya se ha usado este sistema en la sección 2 cuando se han estudiado las matrices de rigidez de distintas barras en dicho sistemas local. Este sistema de coordenadas también se emplea al calcular los esfuerzos que sufren las barras como se verá en §3.6.
- **Sistemas nodales:** Existen otros sistemas de coordenadas asociados a cada nodo de la estructura que pueden ser necesarios para usos específicos, como definir las condiciones de contorno, y en especial, las restricciones de movimiento impuestas por los apoyos. Como se explica en §4.7, en la práctica estos sistemas normalmente coincidirán con el sistema global, salvo en nudos que coincidan con apoyos deslizantes sobre planos inclinados.

3.2. Compatibilidad y equilibrio

Al definir las matrices elementales de cada barra ya se contemplaron las ecuaciones de comportamiento del material, pero al igual que cuando se resuelve un problema de análisis de estructuras por otros medios, en el método matricial también se deben contemplar las condiciones de compatibilidad y equilibrio. A diferencia de otros métodos de resolución

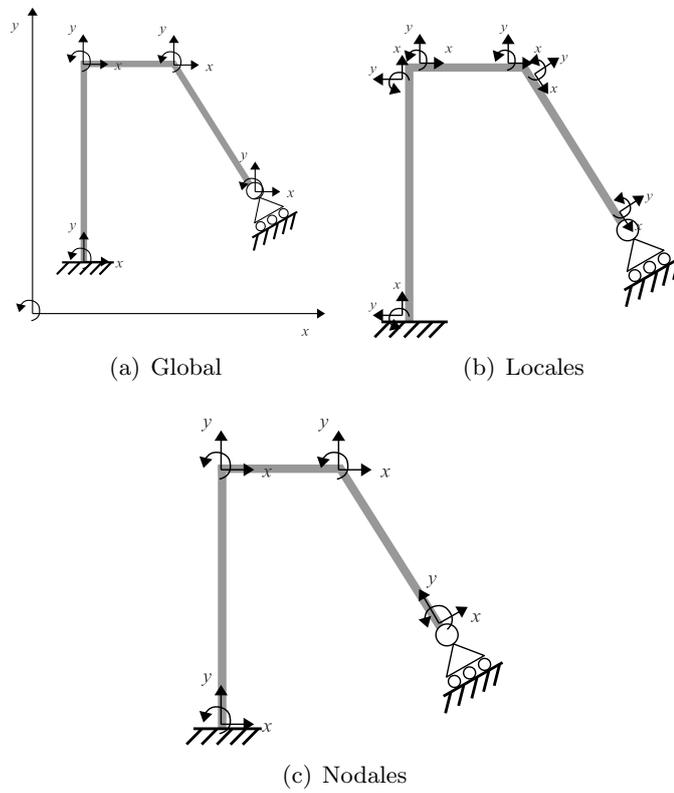


Figura 3.1.1: Los distintos sistemas de coordenadas usados en cálculo matricial: (a) global, (b) el local de cada barra y (c) el nodal para cada nodo.

de estructuras, en cálculo matricial no es relevante conocer previamente el *grado de hiperestaticidad* de la estructura (ni la interna, ni la externa), ya que el método de cálculo no varía. Por lo tanto, dejamos claro en este punto que en cálculo matricial *no* es necesario calcular los grados de hiperestaticidad.

3.2.1. Ecuaciones de compatibilidad

La condición de compatibilidad en los desplazamientos de cada nudo simplemente obliga a que dichos desplazamientos, considerados en coordenadas globales, deben ser únicos para cada nudo.

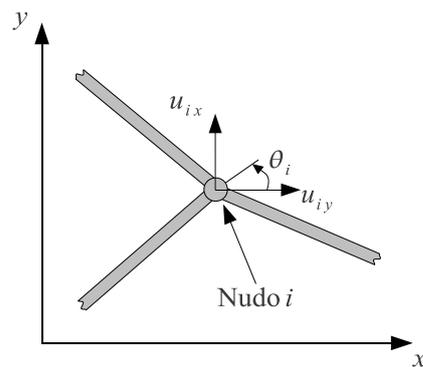


Figura 3.2.1: La condición de compatibilidad fuerza que el desplazamiento de cada nudo sea único aunque intervengan distintas barras.

Esto se traduce en que para cada nudo i donde converjan las barras a, b, c, \dots tenemos:

$$\vec{\mathbf{u}}_i^a = \vec{\mathbf{u}}_i^b = \vec{\mathbf{u}}_i^c = \dots = \vec{\mathbf{U}}_i = \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix} \text{ o, para nudos rígidos, } \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\mathbf{u}}^a$ puede tener 2 o 3 componentes según se trate de un nudo articulado o rígido, respectivamente.

Es decir, en el planteamiento global del problema *no deben usarse* las variables $\vec{\mathbf{u}}_i^a$ individuales de cada barra, sino tan solo los desplazamientos globales $\vec{\mathbf{U}}_i$ para cada nudo.

3.2.2. Ecuaciones de equilibrio

Para cada nudo de la estructura se debe cumplir que el efecto conjunto de las sollicitaciones producidas por todas las barras que converjan en dicho nudo debe coincidir con la fuerza externa que se aplique desde el exterior. Nótese que esto incluye el caso común de sollicitaciones de distintas barras que se anulan entre sí en un nudo que no tiene cargas externas, como demandan las ecuaciones del equilibrio estático.

Recordando que el vector de sollicitaciones sobre un nudo i producido por una barra a se denotó como $\vec{\mathbf{f}}_i^a$, definimos ahora el vector de fuerzas externas $\vec{\mathbf{F}}_i$, por lo que la siguiente expresión:

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{\forall \alpha} \mathbf{K}_{ii}^{\alpha} \vec{\mathbf{u}}_i + \sum_{\forall j} \mathbf{K}_{ij} \vec{\mathbf{u}}_j \quad (3.2.1)$$

(Con α todas las barras incidentes en el nudo i)

representa la ecuación de equilibrio del nudo i . El vector $\vec{\mathbf{F}}_i$ será de tamaño 2, 3 o incluso superior, dependiendo del tipo de uniones encontradas en las barras que llegan al nudo. Para más detalles sobre la determinación del número de gdl en cada nudo, referirse a §4.1.

En la siguiente sección se explica como ensamblar la matriz para una estructura completa, proceso el cual implícitamente impone simultáneamente todas las condiciones de compatibilidad y de equilibrio de la estructura.

3.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez completa

La ecuación global de la estructura tiene la siguiente forma matricial¹:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}} \quad (3.3.1)$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{U}}$ son los vectores de solicitaciones y desplazamientos de la estructura global, respectivamente. A la matriz \mathbf{K} se le llama matriz de rigidez global de la estructura.

Si numeramos cada uno de los N nudos de la estructura como $i = 1, 2, \dots, N$, se puede mostrar que dicha matriz \mathbf{K} se forma a partir de las submatrices descritas en las secciones anteriores como sigue:

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ \hline & \sum_{\alpha} \mathbf{K}_{ii}^{\alpha} & & \mathbf{K}_{ij}^{\beta} & \\ \hline & & \dots & & \\ \hline & \mathbf{K}_{ji}^{\beta} & & \sum_{\alpha} \mathbf{K}_{jj}^{\alpha} & \\ \hline & & & & \dots \\ & & & & \dots \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.3.2)$$

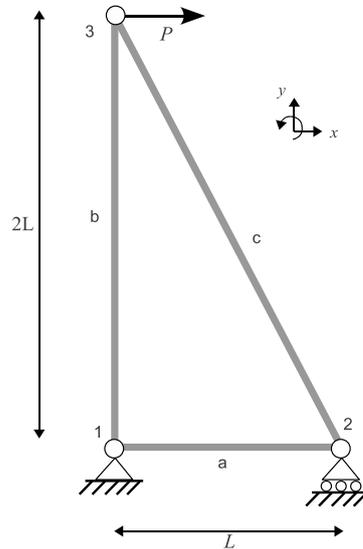
Es decir:

¹Que no es más que un caso concreto del problema de optimización genérico $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, extraordinariamente común y muy estudiado en Álgebra lineal. En este caso es de muy sencilla solución por ser la matriz de rigidez simétrica y definida positiva, por lo que es invertible y tiene una única solución exacta. Normalmente se aprovecha la estructura dispersa (es decir, llena de huecos con ceros) de la matriz de rigidez mediante factorizaciones de matrices específicas para estos casos, pero dichas técnicas quedan fuera del ámbito del presente curso.

- Las i 'ésima submatriz de la diagonal se compone sumando todas las matrices \mathbf{K}_{ii}^α para todas las barras α que inciden en el nudo i .
- Por cada barra β entre dos nudos i y j , existe un par de entradas simétricas con las \mathbf{K}_{ij}^β y \mathbf{K}_{ji}^β en las entradas (i, j) y (j, i) , respectivamente. Siempre se cumplirá que $\mathbf{K}_{ji}^\beta = \mathbf{K}_{ij}^{\beta\top}$.
- El resto de entradas son ceros.

UN EJEMPLO SENCILLO (3ª PARTE) (Continúa de pág.38)

Fijámonos en la estructura que estábamos analizando (repetida abajo para comodidad del lector),



y siguiendo las reglas descritas en este apartado llegamos a la siguiente composición de la matriz de rigidez global de la estructura :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^a + \mathbf{K}_{11}^b & \mathbf{K}_{12}^a & \mathbf{K}_{13}^b \\ \mathbf{K}_{12}^{a\top} & \mathbf{K}_{22}^a + \mathbf{K}_{22}^c & \mathbf{K}_{23}^c \\ \mathbf{K}_{13}^{b\top} & \mathbf{K}_{23}^{c\top} & \mathbf{K}_{33}^b + \mathbf{K}_{33}^c \end{bmatrix}$$

donde cada submatriz es de tamaño 2×2 resultando una matriz global de 6×6 .

3.4. Condiciones de contorno

3.4.1. Elementos de sustentación: apoyos

Antes de abordar la resolución del problema de forma matricial es necesario identificar en qué grados de libertad queda cada nudo libre y en cuáles está su movimiento o giro restringido, y por tanto, aparecen reacciones. Un resumen de los apoyos más comunes y los gdl que restringen se muestra en la Figura 3.4.1. Una vez identificados los gdl restringidos se puede aplicar el método descrito en §3.5.

Tipo de apoyo	Representación	Reacciones	Grados de libertad
Empotramiento		 Dos fuerzas y un momento	 Ninguno
Empotramiento deslizante		 Una fuerza y un momento	 Un desplazamiento
Apoyo simple (articulado)		 Dos fuerzas	 Un giro
Articulado deslizante		 Una fuerza	 Un desplazamiento y un giro

Figura 3.4.1: Tipos de apoyos y sus características fundamentales: reacciones y grados de libertad no restringidos por el apoyo. Fíjese que las condiciones sólo se refieren a uno de los dos extremos de la barra: en el extremo opuesto, la barra podría mostrar cualquier tipo de unión ya que se trata de una cuestión independiente.

3.4.2. Cargas nodales

Hay que tener en mente que el método de cálculo matricial solamente modela una serie discreta de nudos, estando los elementos entre

ellos (típicamente barras o muelles) modelados por medio de las correspondientes matrices de rigidez. Las variables del problema, ya sean datos conocidos o incógnitas a averiguar, son todas las fuerzas y todos los desplazamientos de dicho conjunto discreto de nudos. Lo que ocurre entre un nudo y otro no es tenido en cuenta para nada, aparte de en las matrices de rigidez de cada elemento.

Una consecuencia de esta discretización del problema es que las cargas o fuerzas externas aplicadas a la estructura solamente pueden aparecer en los nudos. Para dejarlo claro: el método matricial no permite que existan cargas distribuidas o puntuales en mitad de las barras. Existen, por supuesto, maneras de abordar dichos problemas mediante el planteamiento de un problema equivalente donde cargas no nodales se convierten en nodales (cuestión abordada en §4.4), pero el método matricial *per se* sólo puede manejar cargas en los nudos.

3.5. Estrategia de resolución del sistema de ecuaciones

En este punto, se ha conseguido plantear el problema de pequeñas deformaciones de una estructura como un sistema lineal en la forma $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$. Sin embargo, el sistema no se puede resolver de manera inmediata por estar datos e incógnitas entremezcladas en los vectores $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{U}}$.

Se hace necesario por tanto particionar el problema de forma que se tenga al menos un vector sin incógnitas. Como método de resolución, seguiremos uno de los métodos posibles, consistente en separar las variables en dos clases: relativas a grados de libertad *restringidos* por alguna condición de contorno, y relativas a grados de libertad *libres* de desplazarse, a las que denotaremos por las letras R y L , respectivamente. Particionaremos tanto los vectores como la matriz de rigidez consecuentemente, siendo el objetivo llegar a un sistema lineal de esta forma:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} \quad (3.5.1)$$

Como ejemplo ilustrativo de cómo realizar la partición, supongamos que tenemos un problema con solamente un par de nudos (1 y 2), siendo modelados por medio de las sollicitaciones $\vec{\mathbf{F}} = (f_{1x} \ f_{1y} \ M_1 \ f_{2x} \ f_{2y} \ M_2)^\top$ y los desplazamientos $\vec{\mathbf{U}} = (u_{1x} \ u_{1y} \ \theta_1 \ u_{2x} \ u_{2y} \ \theta_2)^\top$. Si las dimensiones restringidas son las correspondientes a (u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}) y las libres son $(\theta_1, u_{2y}, \theta_2)$, se procedería como sigue:

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ M_1 \\ f_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ \theta_1 \\ u_{2y} \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Y lo mismo aplicado a la matriz \mathbf{K} llevaría a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{RR} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{24} \\ k_{41} & k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{LL} &= \begin{bmatrix} k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{RL} &= \begin{bmatrix} k_{13} & k_{15} & k_{16} \\ k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ k_{43} & k_{45} & k_{46} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{LR} &= \mathbf{K}_{RL}^{\top} \quad (3.5.2)
\end{aligned}$$

Una vez realizada la partición y dado que $\vec{\mathbf{F}}_L$ y $\vec{\mathbf{U}}_R$ son datos conocidos podemos despejar $\vec{\mathbf{U}}_L$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_L &= \mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R + \mathbf{K}_{LL}\vec{\mathbf{U}}_L \\
\vec{\mathbf{U}}_L &= \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\vec{\mathbf{F}}_L - \mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R) \quad (3.5.3)
\end{aligned}$$

y una vez conocidos dichos desplazamientos, calcular las fuerzas de los nudos restringidos con:

$$\vec{\mathbf{F}}_R = \mathbf{K}_{RR}\vec{\mathbf{U}}_R + \mathbf{K}_{RL}\vec{\mathbf{U}}_L$$

Para el caso, muy común, de que todos los gdl restringidos sean apoyos donde los desplazamientos y giros son todos de cero, tendríamos $\vec{\mathbf{U}}_R = 0$, con lo que las dos fórmulas anteriores se simplifican a:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{U}}_L &= \mathbf{K}_{LL}^{-1}\vec{\mathbf{F}}_L & (\text{Sólo cuando } \vec{\mathbf{U}}_R = 0) \\ \vec{\mathbf{F}}_R &= \mathbf{K}_{RL}\vec{\mathbf{U}}_L & (\text{Sólo cuando } \vec{\mathbf{U}}_R = 0)\end{aligned}\quad (3.5.4)$$

Con esto se habría terminado la resolución del problema matricial desde el punto de vista matemático. El paso siguiente sería la interpretación de las soluciones en términos de esfuerzos de las barras u otros conceptos de resistencia de materiales, como se explica en la sección siguiente.

UN EJEMPLO SENCILLO (4ª PARTE) (Continúa de pág.64)

Una vez hallada la estructura de la matriz global de la estructura, dividimos los gdl en libres y restringidos fijándose en cuales tienen el movimiento totalmente impedido (ver la figura de la pág. 34):

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2y} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2y} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix}$$

Y la misma división debe aplicarse a la matriz \mathbf{K} , que se particiona de la manera que sigue:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 8,7123 & -1,4286 & -0,7123 & 1,4286 \\ 0 & 0 & -1,4286 & 2,8654 & 1,4286 & -2,8654 \\ 0 & 0 & -0,7123 & 1,4286 & 0,7123 & -1,4286 \\ 0 & -4 & 1,4286 & -2,8654 & -1,4286 & 6,8654 \end{bmatrix} 10^7$$

$$\Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{RR} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8654 \end{bmatrix} 10^7$$

$$\mathbf{K}_{LL} = \begin{bmatrix} 8,7123 & -0,7123 & 1,4286 \\ -0,7123 & 0,7123 & -1,4286 \\ 1,4286 & -1,4286 & 6,8654 \end{bmatrix} 10^7$$

Por lo que podemos plantear la siguiente ecuación para despejar el valor de los desplazamientos desconocidos $\vec{\mathbf{U}}_L$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_L &= \mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R + \mathbf{K}_{LL}\vec{\mathbf{U}}_L \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{U}}_L &= \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\vec{\mathbf{F}}_L - \mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R) \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{U}}_L &= \mathbf{K}_{LL}^{-1}\vec{\mathbf{F}}_L \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1,252 & 1,284 & 0 \\ 1,252 & 25,379 & 5,0205 \\ 0 & 5,014 & 2,5 \end{bmatrix} 10^{-8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0,0000125 \\ 0,00025379 \\ 0,0000514 \end{pmatrix} \quad (\text{m})$$

Y con esto habríamos alcanzado el objetivo de calcular los desplazamientos que sufre la estructura. Este ejemplo, que hemos realizado por partes, se puede encontrar más desarrollado en la sección 5.1.

3.6. Cálculo de esfuerzos en barras

Una vez se han resuelto los desplazamientos de la estructura completa como se ha descrito hasta ahora, tenemos perfectamente definido el valor del vector de desplazamientos en coordenadas globales \mathbf{U} . A continuación vamos a mostrar como, a partir de únicamente esta información y las matrices de rigidez, es posible calcular los esfuerzos que soporta cada una de las barras de la estructura.

Supongamos que nos centramos en una barra en particular situada entre los nudos i y j . Los esfuerzos vendrán determinados por cómo ha sido obligada a deformarse en dichos extremos, valores que nombramos como $\vec{\mathbf{U}}_i$ y $\vec{\mathbf{U}}_j$ y que conocemos por ser una parte del vector \mathbf{U} .

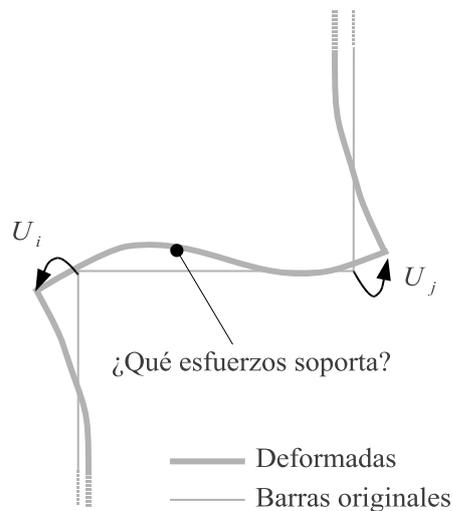


Figura 3.6.1: Una barra ij desplazada de acuerdo a \vec{U}_i y \vec{U}_j soportará unos esfuerzos determinados únicamente por dichos desplazamientos y su matriz de rigidez.

Como se vio en §2.1, el cálculo matricial de estructuras está basado en la siguiente aproximación lineal:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{f}}^a &= \hat{\mathbf{K}}^a \hat{\vec{u}}^a \\ \begin{pmatrix} \hat{f}_i^a \\ \hat{f}_j^a \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_i^a \\ \hat{u}_j^a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

donde se ha usado como superíndice el nombre de la barra (a) que va desde el nudo i al j . Nuestra intención es calcular la incógnitas de los esfuerzos $\hat{\vec{f}}^a = (\hat{f}_i^a \hat{f}_j^a)^\top$, que no deben confundirse con las fuerzas del vector $\vec{\mathbf{F}}$, que se compone de cargas externas (la parte $\vec{\mathbf{F}}_L$) y de reacciones (la parte $\vec{\mathbf{F}}_R$).

Nótese como también aparece en la Ec. 3.6.1 la matriz de rigidez de la barra (importante, en *coordenadas locales*, no confundirse con la matriz en globales), dato que ya es conocido.

Por lo tanto únicamente hemos de calcular el vector de desplazamientos en coordenadas locales $\hat{\mathbf{u}}^a = (\hat{\mathbf{u}}_i^a \ \hat{\mathbf{u}}_j^a)^\top$, lo cual es muy sencillo a partir de los vectores correspondientes en coordenadas globales $\vec{\mathbf{U}}_i$ y $\vec{\mathbf{U}}_j$ que ya conocemos. Recordando que la matriz de transformación de coordenadas de la barra a , denotada como \mathbf{T}^a , tiene la propiedad de convertir coordenadas locales en globales, es decir:

$$\vec{\mathbf{u}}^a = \mathbf{T}^a \hat{\mathbf{u}}^a \quad (3.6.2)$$

es directo obtener la relación inversa:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^a &= (\mathbf{T}^a)^{-1} \vec{\mathbf{u}}^a \\ &= (\mathbf{T}^a)^\top \vec{\mathbf{u}}^a \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

donde se ha usado el hecho de que la inversa de una matriz ortogonal y unitaria (como es el caso de cualquier matriz de rotación), es igual a su traspuesta.

A partir de Ec. 3.6.1 y Ec. 3.6.3 se sigue entonces:

$$\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a (\mathbf{T}^a)^\top \vec{\mathbf{u}}^a \quad (3.6.4)$$

fórmula que ya nos permite calcular los esfuerzos de la barra en coordenadas locales $\hat{\mathbf{f}}^a$, al disponer de todos los términos de la derecha tras resolver el problema matricial.

Solamente queda un último paso, que si bien parece superfluo en este momento, será muy conveniente en casos de existir cargas no nodales (ver §4.4). Se trata de pasar los esfuerzos obtenidos como $\hat{\mathbf{f}}^a$ del sistema de coordenadas empleado en cálculo matricial al sistema de coordenadas correspondiente a resistencia de materiales.

Como se ve en la Figura 3.6.2, este cambio consiste en llamar a los esfuerzos en dirección del eje x local ($\hat{\mathbf{f}}_x$) e y local ($\hat{\mathbf{f}}_y$) por sus nombres significativos en resistencia de materiales: axiles (N) y cortantes (V), correspondientemente. Además, tanto el axil, como el cortante y el

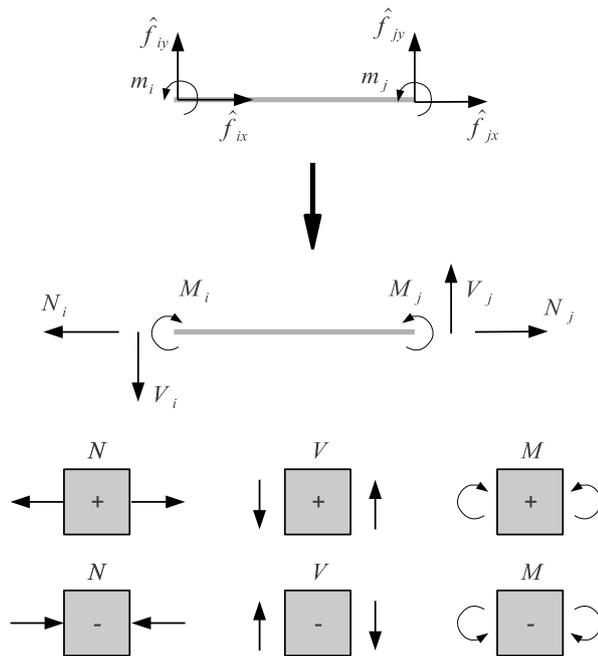


Figura 3.6.2: Convenio de signos usado para los esfuerzos en cálculo matricial (arriba) y en resistencia de materiales (abajo).

momento flector en el nodo origen de la barra (i en nuestro ejemplo) tienen criterios de signos positivos opuestos en ambos sistemas.

Por lo tanto, el vector de axiles, cortantes y flectores según el convenio de resistencia de materiales se obtiene mediante:

$$\begin{pmatrix} -N_i^a \\ -V_i^a \\ -M_i^a \\ N_j^a \\ V_j^a \\ M_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^a \\ \hat{f}_{iy}^a \\ m_i^a \\ \hat{f}_{jx}^a \\ \hat{f}_{jy}^a \\ m_j^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i^a \\ \hat{\mathbf{f}}_j^a \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{f}}^a \quad (3.6.5)$$

Recordar una vez más que este cambio de signo se debe únicamente al convenio escogido en resistencia de materiales, mostrado en la Figura 3.6.2. Existen otros autores que emplean un convenio donde los corrientes aparecen con signo contrario al aquí propuesto, por lo que se recomienda prestar especial atención al contrastar fórmulas empleadas en los distintos libros, apuntes y prontuarios de resistencia de materiales.

Finalmente, resaltar que se pueden ver ejemplos prácticos de estos cálculos al final de los problemas resueltos de las secciones §5.1 y §5.2.

CAPÍTULO 4

SITUACIONES PARTICULARES DE CÁLCULO

En la sección anterior se ha visto como resolver un problema de cálculo matricial, asumiendo que solamente existían los apoyos simples resumidos en la Figura 3.4.1 y que sólo teníamos cargas en los nudos de la estructura. En la práctica encontraremos una amplia variedad de situaciones en que no se cumplan dichas condiciones. Como demostramos en este capítulo, esto no imposibilita para nada afrontar el cálculo de dichas estructuras mediante el método matricial, aunque introducirá algunos pasos adicionales al método de resolución básico.

4.1. Determinación de gdl en nudos y “orlado” de matrices de rigidez

Uno de los primeros pasos al plantear la solución de una estructura es definir qué gdl se estudiarán en el problema. Hay que aclarar que en cada nudo existirán un determinado número de gdl independientes, pero algunos de ellos pueden no estudiarse a cambio de emplear matrices condensadas (recordar lo visto en §2.5).

Si a un cierto nudo i llegan una o más barras mediante uniones

del tipo articulado, el giro que tenga cada barra al llegar al nudo no será relevante, por lo que podríamos estudiar solamente dos gdl (u_{ix} y u_{iy}) en el problema de cálculo matricial. En cambio, cuando todas las barras que lleguen al nudo lo hagan mediante uniones rígidas está claro que se tendrán en cuenta los tres gdl (u_{ix} , u_{iy} y θ_i).

Sin embargo, habrá ocasiones en que aparezcan uniones de distintos tipos llegando a un mismo nudo; o bien distintas barras llegarán a un apoyo articulado pero estarán unidas entre sí mediante uniones rígidas en grupos, no estando cada barra unida a todas las demás; o también podremos encontrar deslizaderas de distinto tipo.

En casos así pueden surgir dudas sobre cómo determinar los grados de libertad existentes y sobre cuales estudiar mediante cálculo matricial, por lo que detallamos a continuación la manera precisa en que se deben abordar este tipo de situaciones:

- **Determinación de los gdl independientes:** El procedimiento riguroso sería el de considerar, para cada nudo, el máximo de 3 gdl posibles por cada una de las barras que lleguen (dos desplazamientos y un giro). Después, este número se irá reduciendo si se comprueba que se están contando gdl por duplicado que no son realmente independientes. Por ejemplo, el caso más común es que los desplazamientos en x e y de todos los extremos de las barras que llegan al nudo sean los mismos por desplazarse de manera solidaria. Respecto a los giros, se pueden dar situaciones más variadas. En caso de existir más de un gdl independiente en la misma dimensión (x , y o θ), se usará el nombre de la barra como superíndice. Más abajo se analiza un ejemplo que ilustra varios de los casos que se pueden encontrar.
- **Determinación de los gdl a estudiar:** De todos los gdl independientes, aquellos que afecten a una única barra pueden no estudiarse en el problema matricial, con el consiguiente ahorro en el tamaño de la matriz global de la estructura. A cambio, habrá que emplear la matriz correspondiente para la barra de la que no queremos estudiar algún gdl (las matrices condensadas).

- **Ensamblaje de matrices:** A un nudo i pueden llegar barras con uniones articuladas o rígidas que, como se ha visto en el capítulo 2, implicarán que las matrices de rigidez \mathbf{K}_{ii}^a para cada barra a serán de un tamaño distinto (2×2 o 3×3 , respectivamente). A la hora de ensamblar la matriz de rigidez de la estructura completa esto puede parecer un problema pues habrá que sumar o encajar matrices de distintos tamaños. La solución consiste sencillamente en añadir filas o columnas de ceros en los lugares correspondientes a gdl que no afecten a cada barra hasta lograr que todas las matrices tengan el tamaño correspondiente al total de gdl modelados en el nudo.

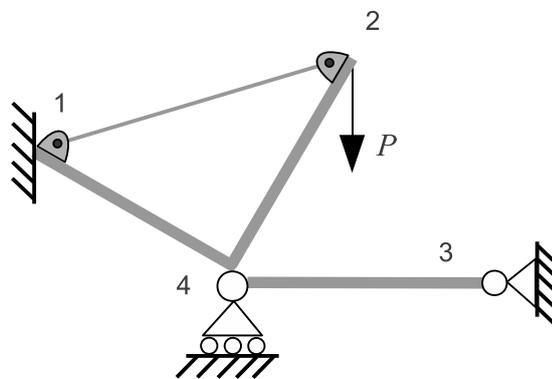


Figura 4.1.1: Ejemplo de una estructura con nudos donde se hará necesario “orlar” matrices.

Veamos cómo llevar todo esto a la práctica con el ejemplo de la Figura 4.1.1. Para dejar claro la interpretación del esquema, al nudo 4 confluyen las barras 14 y 24 unidas entre sí mediante uniones rígidas y, por otro lado, la barra 34, que puede rotar independientemente del sólido rígido formado por las dos primeras.

Primero determinaremos los gdl a usar para modelar la estructura mediante cálculo matricial, analizando nudo a nudo como se ha descrito arriba:

- **Nudo 1:** En principio, consideramos $3 \times 2 = 6$ gdl por llegar dos barras, la 14 y la 12: $\{u_{1x}^{14}, u_{1y}^{14}, \theta_1^{14}, u_{1x}^{12}, u_{1y}^{12}, \theta_1^{12}\}$. Observamos que los desplazamientos en x e y de ambas barras están ligados y que el giro del nudo no afecta a la barra 12 por tratarse de una unión articulada, por lo que sólo quedan los siguientes gdl a considerar en nuestro problema: $\{u_{1x}, u_{1y}, \theta_1^{14}\}$. Nótese cómo se han eliminado los superíndices de los gdl que son compartidos por todas las barras. Esto es una práctica habitual con objeto de simplificar la notación. Igualmente, cuando un gdl sólo afecta a una de las barras, como es el caso del giro θ_1^{14} , también es habitual darlo por sentado y prescindir del superíndice. En ese caso, la lista de gdl queda: $\{u_{1x}, u_{1y}, \theta_1\}$.
- **Nudo 2:** En principio, consideramos $3 \times 2 = 6$ gdl por llegar dos barras, la 12 y la 24: $\{u_{2x}^{12}, u_{2y}^{12}, \theta_2^{12}, u_{2x}^{24}, u_{2y}^{24}, \theta_2^{24}\}$. Siguiendo exactamente el mismo razonamiento que para el nudo 1, acabamos reduciendo el número de gdl a tres: $\{u_{2x}, u_{2y}, \theta_2\}$.
- **Nudo 3:** Los tres gdl posibles correspondientes a la única barra 34 son: $\{u_{3x}^{34}, u_{3y}^{34}, \theta_3^{34}\}$. Descartamos incluir el gdl del giro θ_3^{34} en el problema por tratarse de una barra acabada en unión articulada, cuya matriz de rigidez ya tiene en cuenta los efectos del posible giro en ese extremo. Además, al no haber posibilidad de confusión por no existir más barras, simplificamos la notación descartando los superíndices, y llegamos por tanto a: $\{u_{3x}, u_{3y}\}$.

Nudo 4: En principio, consideramos $3 \times 3 = 9$ gdl por llegar las tres barras 14, 24 y 34: $\{u_{4x}^{14}, u_{4y}^{14}, \theta_4^{14}, u_{4x}^{24}, u_{4y}^{24}, \theta_4^{24}, u_{4x}^{34}, u_{4y}^{34}, \theta_4^{34}\}$. Es fácil ver que los desplazamientos en x e y de todas las barras están ligados, por lo que $u_{4x} \equiv u_{4x}^{14} \equiv u_{4x}^{24} \equiv u_{4x}^{34}$ y $u_{4y} \equiv u_{4y}^{14} \equiv u_{4y}^{24} \equiv u_{4y}^{34}$. Respecto a los giros, las barras 14 y 24 giran como un sólido rígido, por lo que ambos gdl son en realidad uno solo: $\theta_4^{14,24} \equiv \theta_4^{14} \equiv \theta_4^{24}$. Asumiendo que el giro de la barra 34 es independiente a éste y que se utilizará la matriz de rigidez correspondiente a una unión articulada, no será necesario introducir el giro θ_4^{34} en el problema, quedando la lista de gdl en este nudo: $\{u_{4x}, u_{4y}, \theta_4^{14,24}\}$.

Para resumir, estos serían los vectores completos de fuerzas y desplazamientos con todos los gdl que modelarán mediante cálculo matricial la estructura del ejemplo:

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ \hline f_{2x} \\ f_{2y} \\ M_2 \\ \hline f_{3x} \\ f_{3y} \\ \hline f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4^{14,24} \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ \hline u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ \hline u_{3x} \\ u_{3y} \\ \hline u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4^{14,24} \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Abordamos a continuación el problema del ensamblaje de matrices. Siguiendo el procedimiento descrito en §3.3 llegamos a la siguiente estructura para la matriz de rigidez global \mathbf{K} :

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ \hline f_{2x} \\ f_{2y} \\ M_2 \\ \hline f_{3x} \\ f_{3y} \\ \hline f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4^{14,24} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{14} + \mathbf{K}_{11}^{12*} & \mathbf{K}_{12}^{12*} & 0 & \mathbf{K}_{14}^{14} \\ \mathbf{K}_{21}^{12*} & \mathbf{K}_{22}^{24} + \mathbf{K}_{22}^{12*} & 0 & \mathbf{K}_{24}^{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{33}^{34} & \mathbf{K}_{34}^{34*} \\ \mathbf{K}_{41}^{14} & \mathbf{K}_{42}^{24} & \mathbf{K}_{43}^{34*} & \mathbf{K}_{44}^{14} + \mathbf{K}_{44}^{24} + \mathbf{K}_{44}^{34*} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ \hline u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ \hline u_{3x} \\ u_{3y} \\ \hline u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4^{14,24} \end{pmatrix}$$

Las partes que requieren especial atención son aquellas matrices “orladas” (las marcadas como \cdot^*), ya que deberán ser modificadas para insertar filas o columnas de ceros en los gdl que no modelen. Veamos el caso concreto de la primera entrada de la matriz \mathbf{K} , la $\mathbf{K}_{11}^{14} + \mathbf{K}_{11}^{12*}$. En este caso, \mathbf{K}_{11}^{14} y \mathbf{K}_{11}^{12} son parte de las matrices de rigidez en coordenadas globales para barras del tipo biempotada y biarticulada cuyas expresiones se vieron en las secciones 2.3 y 2.2, respectivamente. Es interesante representar explícitamente qué gdl relacionan cada una de ellas:

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \end{pmatrix}^{14} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{11}^{14}} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{pmatrix}^{12} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{11}^{12}} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

La diferencia de tamaños hace que no podamos sumar ambas matrices directamente. Esto se arregla claramente introduciendo el gdl correspondiente al giro (el desplazamiento θ_1 y el momento M_1) en la matriz \mathbf{K}_{11}^{12} , dando lugar a la matriz modificada \mathbf{K}_{11}^{12*} :

$$\mathbf{K}_{11}^{12*} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\begin{matrix} u_{1x} & u_{1y} & \theta_1 \end{matrix}} \left. \begin{matrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \end{matrix} \right\} \quad (4.1.4)$$

Operando igualmente para todas las matrices orladas se conseguirá formar la matriz global de cualquier estructura, sin importar lo complicado

de la distribución de sus gdl en distintas barras. En la Figura 4.1.2 se muestran algunos ejemplos de uniones que se pueden encontrar en la práctica, junto al análisis de sus gdl.

4.2. Simplificaciones debidas a simetría

En estructuras planas se podrán aplicar las simplificaciones por simetría cuando exista un eje con respecto al cual la disposición de los elementos, sus propiedades, las cargas y los apoyos, sean todos simétricos. En dicho caso podremos reducir el análisis de la estructura a solamente una de sus dos mitades, sabiendo que los resultados de las reacciones en apoyos y esfuerzos en barras que hayan sido eliminados coinciden con los de la mitad que sí se calcula.

Evidentemente, deberemos modificar la estructura a la hora de dividirla. Para entender cómo realizar dichos cambios es ilustrativo considerar qué le ocurre a una sección de material que caiga exactamente sobre el eje de simetría. Como se muestra en la Figura 4.2.1, las condiciones de simetría imponen que su desplazamiento en la dirección x , así como su giro θ deben de ser ambos cero (se puede ver que cualquiera de esos dos movimientos rompería la simetría de la solución). En cuanto al desplazamiento en y , éste queda libre y su valor no está restringido en modo alguno por la simetría.

Al tomar las restricciones de los tres grados de libertad en su conjunto comprobamos que esta situación se corresponde exactamente con el de un apoyo del tipo “empotramiento deslizante”, por lo que, *en general*, debemos añadir un apoyo de este tipo a todo elemento que corte el eje de simetría transversalmente.

En la Figura 4.2.2(a) se muestra este principio aplicado a diferentes situaciones particulares que se pueden dar. Alternativamente, también podemos encontrar casos de barras que caigan exactamente sobre el eje de simetría. En ese caso, reemplazaremos la barra en el problema simplificado por otra con la mitad del valor de rigidez de la original,

Ejemplos de uniones	Todos los GDL independientes	GDL a estudiar como mínimo
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c} \\ y_i^{a,b,c} \\ \theta_i^a \\ \theta_i^b \\ \theta_i^c \end{pmatrix} \quad (5 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (2 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c} \\ y_i^{a,b,c} \\ \theta_i^{a,b,c} \end{pmatrix} \quad (3 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (3 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c} \\ y_i^{a,b,c} \\ \theta_i^{a,b} \\ \theta_i^c \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (3 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c,d} \\ y_i^{a,b,c,d} \\ \theta_i^a \\ \theta_i^{b,c,d} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (3 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^a \\ x_i^b \\ y_i^{a,b} \\ \theta_i^{a,b} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i^a \\ x_i^b \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c} \\ y_i^{a,b} \\ y_i^c \\ \theta_i^a \\ \theta_i^{b,c} \end{pmatrix} \quad (5 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i^a \\ y_i^c \\ \theta_i^{b,c} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$
	$\begin{pmatrix} x_i^{a,b,c} \\ y_i^a \\ y_i^{b,c} \\ \theta_i^{a,b,c} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$	$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i^a \\ y_i^{b,c} \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (4 \text{ gdl})$

Figura 4.1.2: Ejemplos de uniones y análisis de sus grados de libertad. Los gdl de un nudo i que no aparecen en la columna de la derecha no se estudian a cambio de emplear en su caso las matrices de rigidez condensadas correspondientes (por ejemplo, la de 5×5 articulada-rígida, o la 4×4 biarticulada).

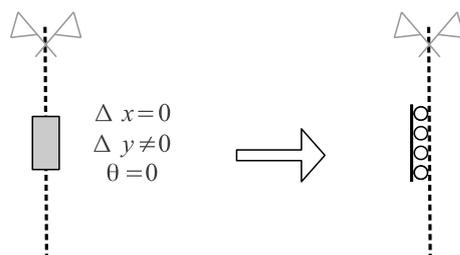


Figura 4.2.1: Condiciones de contorno impuestas en la mitad de un problema en el que existe simetría con respecto a un eje.

como se muestra en la Figura 4.2.2(b).

Finalmente, mencionar que las cargas de tipo distribuido (carga térmica, carga de peso distribuido) no sufren modificación alguna por el hecho de realizar la simplificación por simetría, incluso cuando la carga ocurra sobre una barra que atraviesa (o cae sobre) el eje de simetría. En cuanto a cargas puntuales, sólo podríamos encontrar el caso especial de cargas verticales sobre el mismo eje (ya que de existir cargas horizontales o de momento no tendríamos una estructura simétrica), en cuyo caso la carga en el problema simplificado se reducirá a la mitad.

4.3. Desplazamientos impuestos y asientos

Normalmente los desplazamientos en los gdl restringidos por un apoyo son exactamente cero, modelando esto la idealización de un apoyo perfecto. En la práctica, dependiendo de diversos factores como el tipo de terreno, se puede dar el caso que un apoyo ceda produciendo un cierto *asiento*. Se supondrá que conocemos el valor de dicho asiento, como por ejemplo δ_{1y} para la estructura de la Figura 4.3.1.

Para ver en qué se concreta el hecho de tener el asiento, hay que fijarse en que la ecuación Ec. 3.5.3, mediante la que calculamos los desplazamientos de los nudos libres \vec{U}_L , requiere como dato conocido los desplazamientos de los grados de libertad restringidos (el vector \vec{U}_R). En

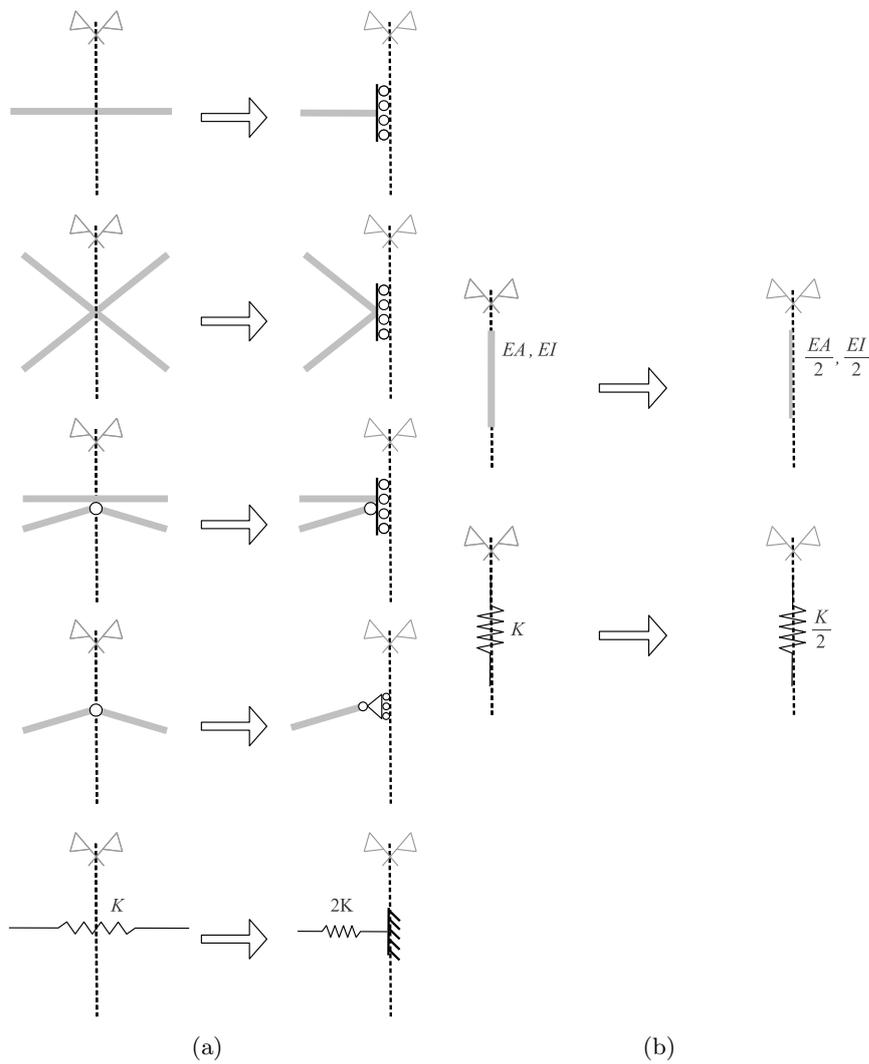


Figura 4.2.2: Simplificaciones por simetría: (a) elementos que atraviesan y (b) elementos sobre el eje de simetría.

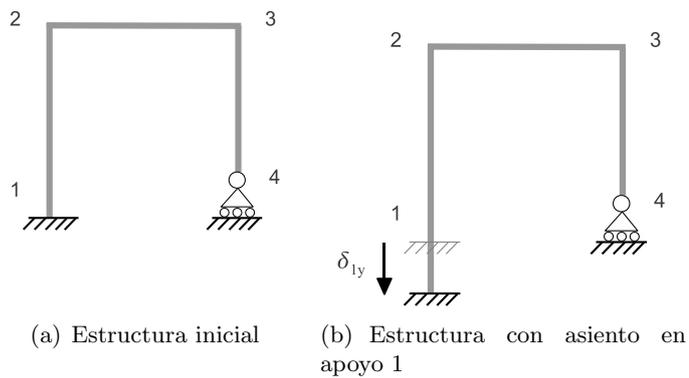


Figura 4.3.1: Caso de una estructura con un asiento conocido en uno de los apoyos.

el caso de una estructura sin asientos como la de la figura Figura 4.3.1(a), tenemos:

$$\vec{\mathbf{U}}_R = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ \frac{u_{4y}}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

es decir, el vector será todo ceros. Esto es lo habitual excepto cuando existan asientos. En dicho caso, como el ejemplo de la Figura 4.3.1(b), tendríamos:

$$\vec{\mathbf{U}}_R = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ \frac{u_{4y}}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

donde el signo menos indica que el asiento tiene lugar en la dirección negativa de las coordenadas y en el sistema global de coordenadas.

Es importante remarcar que el hecho de que exista o no un asiento no afecta para nada a la división de los grados de libertad en libres y restringidos. Simplemente, un asiento conocido sigue siendo una restricción que en lugar de ser igual a cero, tiene otro valor. Así mismo, el resto del método de resolución no varía con respecto a todo lo explicado en el capítulo 3.

4.4. Cargas a lo largo de las barras

Ya se ha mencionado anteriormente que el método de cálculo matricial solamente es capaz de modelar cargas externas sobre la estructura si están aplicadas en los nudos, ya que sólo pueden entrar en el modelo a través del vector \vec{F}_L . En la práctica, sin embargo, será común encontrarnos casos de cargas externas no nodales, como cargas distribuidas a lo largo de una barra o puntuales en mitad de una barra.

Dichos casos se pueden afrontar mediante el *principio de superposición*: se dividirá el problema en tantos subproblemas como cargas no nodales existan, más otro problema donde todas las cargas se hayan sustituido por sus nodales equivalentes de forma que ya sí se pueda resolver mediante cálculo matricial. Consideremos el ejemplo de la Figura 4.4.1, donde existe una carga uniformemente distribuida a lo largo de la barra 23, de valor q (Newtons/metro).

Se procede dividiendo el problema en una suma de subproblemas. La idea central del principio de superposición, que debe quedar muy clara, es la siguiente:

Los desplazamientos, esfuerzos y reacciones resultantes del problema original **serán la suma** de los desplazamientos, esfuerzos y reacciones **de cada uno de los subproblemas**.

El cálculo de los desplazamientos (\mathbf{U}) se deja únicamente al subproblema que se resuelve por cálculo matricial, ya que se pueden obtener

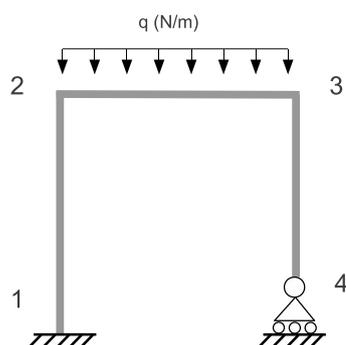


Figura 4.4.1: Un ejemplo de estructura con cargas no nodales.

fácilmente de forma sistemática como se vio en el capítulo anterior. Típicamente, denotaremos a este subproblema con la letra M . Respecto al resto de subproblemas (denotados en numeración romana I, II , etc.), les impondremos desplazamientos nulos en sus nudos. De esta forma, los desplazamientos finales (la suma de todos los desplazamientos en M, I, II , etc.) serán directamente los desplazamientos obtenidos mediante cálculo matricial.

Forzar dichos desplazamientos nulos en los subproblemas equivale a introducir *apoyos o empotramientos virtuales* en los nudos libres. Igualmente hay que tener claro que la suma de todas las cargas en todos los subproblemas deben igualar a las cargas de la estructura inicial. Esto quiere decir que si una carga no nodal se tiene en cuenta en un subproblema, ya no debe aparecer en ningún otro. Así mismo, las reacciones que aparezcan en los apoyos o empotramientos *virtuales* deberán trasladarse al subproblema de cálculo matricial M como si fuesen fuerzas externas en la dirección contraria. La idea es que la suma de estas *fuerzas nodales equivalentes* en M con las reacciones en el subproblema correspondiente se anulen, ya que ninguna de dichas fuerzas existen realmente en la estructura original. Todo esto se aclarará más abajo con un ejemplo.

Respecto a las reacciones que aparezcan dentro de cada subproblema en apoyos *reales* (no virtuales, sino que ya estaban en el problema original), no se trasladan al subproblema M : simplemente hay que tenerlos

en cuenta para el cálculo de las reacciones totales, que recordamos son la suma de las reacciones de todos los subproblemas.

Es instructivo llevar todas estas ideas a la práctica con el ejemplo de la Figura 4.4.1. En este caso sólo existe una carga distribuida, así que planteamos un subproblema (numerado como I) en el que se añaden dos empotramientos virtuales (en los nudos 2 y 3) y un subproblema a resolver mediante cálculo matricial, llamado M . Esta división se muestra en la Figura 4.4.2.

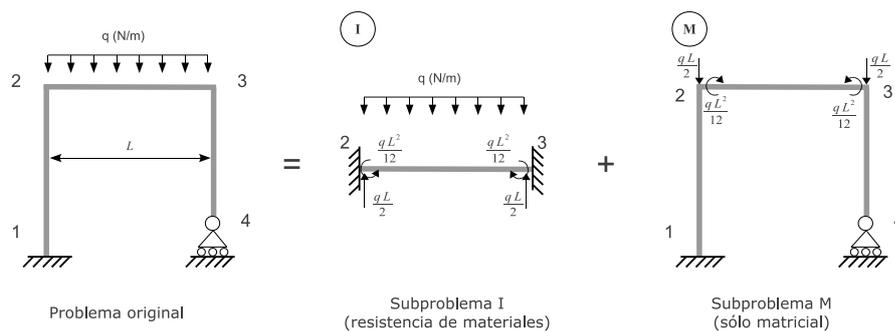


Figura 4.4.2: División de la estructura de la Figura 4.4.1 en dos subproblemas usando el principio de superposición, donde el principal (M) ya sí se puede abordar mediante cálculo matricial al no tener cargas distribuidas.

Observar cómo para el subproblema I se han tenido que introducir dos apoyos *virtuales* en los nudos 2 y 3, al estar estos libres en el problema original, en los que aparecen reacciones que se han llevado (en sentido inverso) al problema M como cargas nodales equivalentes. El valor de las reacciones en I dependerá del tipo de carga aplicada y del tipo de apoyos en los dos extremos (uniones articuladas o rígidas), y se pueden consultar en prontuarios de resistencia de materiales.

El problema M se resolvería conforme a lo descrito en el capítulo 3, teniendo únicamente en cuenta que las cargas nodales equivalentes aparecerán en el vector $\vec{\mathbf{F}}_L$ (fuerzas en gdl libres):

$$\vec{\mathbf{F}}_L = \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \\ f_{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

Además, a la hora de calcular los esfuerzos de las barras como se explicó en §3.6, los esfuerzos obtenidos en la Ec. 3.6.5 solamente se referirían ahora al subproblema M . Los esfuerzos totales se obtendrán sumándoles los del subproblema I , es decir:

$$\begin{pmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{pmatrix}^{\text{Final}} = \begin{pmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{pmatrix}^M \underset{\text{De Ec. 3.6.5}}{=} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}^I \quad (4.4.2)$$

Observar que al rellenar el último vector de la derecha, el de los esfuerzos en el subproblema I , se ha tenido en cuenta el convenio de signos correspondiente a resistencia de materiales (ver Figura 3.6.2).

Es interesante comparar el caso de la Figura 4.4.2 con otras dos posibles situaciones mostradas en la Figura 4.4.3, donde la carga distribuida se encuentra ahora en las barra 12 y 34, respectivamente.

En la estructura de la Figura 4.4.3(a) la carga distribuida recae sobre la barra 12, que tiene uno de sus extremos en un apoyo (empotramiento).

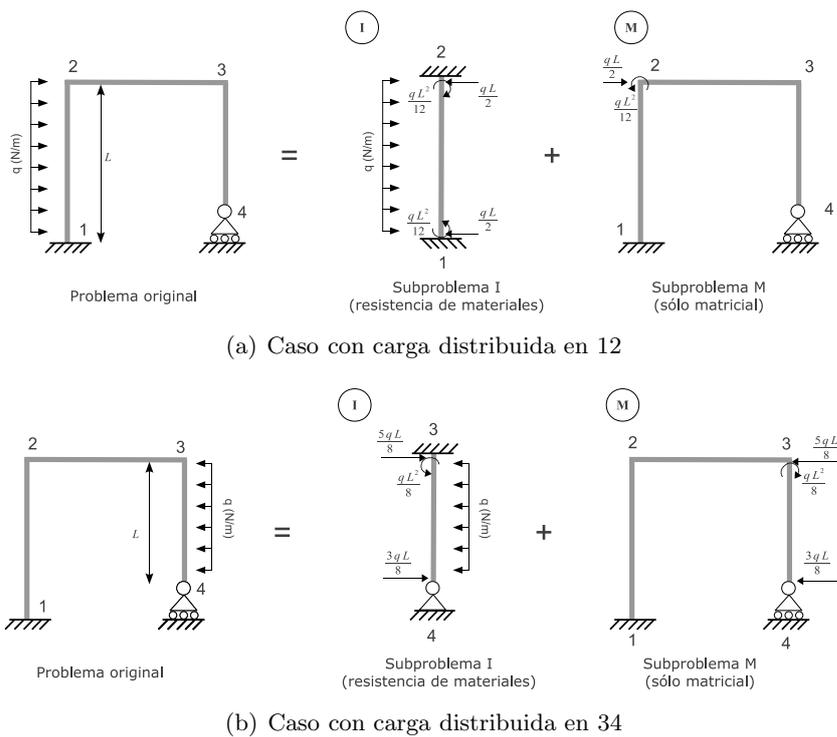


Figura 4.4.3: Otros ejemplos de divisiones de una estructura en dos subproblemas. Comparar con la Figura 4.4.2.

Por lo tanto, los dos apoyos del subproblema *I* en este caso son distintos: solamente el del extremo 2 es virtual. Esto se refleja en que las cargas nodales equivalentes sólo se llevan al problema *M* para dicho extremo 2. Otro detalle a tener en cuenta en este caso es que existe una componente de las reacciones en el nudo 1 que aparecen en el subproblema *I*. En otras palabras, la reacción \vec{F}_1 para el problema original se obtendría como la suma de:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{pmatrix}^{\text{Total}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{pmatrix}^M \text{ Obtenida como parte de } \vec{\mathbf{F}}_R + \begin{pmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}^I \quad (4.4.3)$$

donde el último vector se corresponde a las reacciones que aparecen en 1 en el subproblema I (como siempre ocurre para los vectores de fuerzas $\vec{\mathbf{F}}$, dado en coordenadas globales).

Finalmente, consideramos la estructura de la Figura 4.4.3(b), donde la carga distribuida aparece ahora sobre la barra 34, cuyo extremo 4 va a un apoyo articulado móvil (“carrito”). El procedimiento es similar a los casos anteriores, prestando especial atención al hecho de que sustituimos el apoyo de 4 por uno inmóvil en el subproblema I , ya que en los subproblemas siempre forzaremos a que los extremos de la barra en cuestión no se muevan. Observar como en este caso sí que hay que trasladar la inversa de la reacción horizontal en 4 al problema M como carga nodal equivalente, ya que en la estructura original la componente horizontal de 4 era un gdl libre, que ha sido fijado mediante empotramiento virtual.

4.5. Cargas de temperatura en barras

Podemos encontrar estructuras donde una o varias barras sufran *cargas de temperatura*, es decir, incrementos de temperatura de un valor dado ΔT con respecto a una situación inicial de equilibrio. En dichos casos el procedimiento a seguir es exactamente igual al visto para cargas no nodales en §4.4, aunque lo tratamos por separado en esta sección por claridad.

Por lo tanto, se dividirá el problema original en la suma de una serie de subproblemas, uno por cada barra que sufra carga de temperatura (más los subproblemas correspondientes si existiesen otras cargas no nodales como las vistas en §4.4), y más un problema principal M a resolver por cálculo matricial donde se deben añadir las cargas nodales equivalentes a las cargas de cada subproblema.

Consideremos el efecto de una carga de temperatura en una barra cuyos dos extremos tienen restringido el movimiento (p.ej. una barra biempotrada). Este caso es de interés por ser exactamente la situación que encontraremos en cada uno de los subproblemas para barras con incrementos de temperatura. Si la barra estuviese libre, un incremento de temperatura ΔT produciría una dilatación de valor ΔL_T que, expresada en deformaciones unitarias (ε_T), se puede aproximar mediante un coeficiente de dilatación α así:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L_T}{L} = \varepsilon_T &= \alpha \Delta T \rightarrow \\ \Delta L_T &= \alpha \Delta T L \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Un valor típico de este coeficiente para el acero es de $12 \cdot 10^{-6} \frac{m/m}{^\circ C}$. Al estar la barra empotrada en sus dos extremos, no puede producirse esta dilatación lo que origina un esfuerzo axial N de compresión. El valor de dicho esfuerzo axial se obtiene a partir de la ley de Hooke:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L_N}{L} &= \varepsilon_N = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \rightarrow \\ \Delta L_N &= \frac{NL}{EA} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

y forzando ahora a que la suma de ambos alargamientos sea cero debido al empotramiento:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \Delta L_N + \Delta L_T = 0 \\ 0 &= \frac{NL}{EA} + \alpha\Delta TL \\ -\frac{N\cancel{L}}{EA} &= \alpha\Delta T\cancel{L}\end{aligned}$$

llegamos a:

$$N = -EA\alpha\Delta T \quad (\text{El valor negativo indica compresión}) \quad (4.5.3)$$

donde E y A son el módulo de elasticidad del material y el área de su sección transversal, respectivamente.

Veamos como aplicar todo esto en la práctica para el caso de la estructura mostrada en la Figura 4.5.1, donde dos barras (la 12 y la 23) sufren cargas de temperatura.

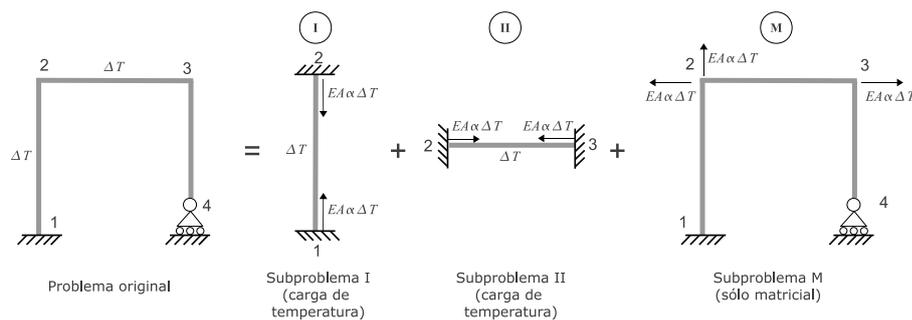


Figura 4.5.1: Caso de una estructura con cargas de temperatura y su correspondiente descomposición en subproblemas.

Se puede observar que se ha considerado un subproblema por cada barra con carga de temperatura, donde se han indicado los esfuerzos axiales (o reacciones) en ambos extremos de la barra. Para el caso de

grados de libertad que se hayan restringido con apoyos virtuales, la inversa de dichos esfuerzos aparecen como cargas nodales equivalentes en el sistema M de la derecha. El esfuerzo del extremo 1 en el subproblema I forma parte de la reacción en 1 y al ser un apoyo real, no se traslada al problema M . En cambio, sí que se introduce la carga nodal equivalente en 2 (dirección vertical) por ser éste un apoyo virtual.

En resumen, el problema M se resolvería como se describió en el capítulo 3, teniendo en cuenta que las cargas que hay que definir en el vector $\vec{\mathbf{F}}_L$ (fuerzas en gdl libres) son:

$$\vec{\mathbf{F}}_L = \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \\ f_{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -EA\alpha\Delta T \\ EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

A la hora de obtener los esfuerzos de cada barra para el problema original, a la Ec. 3.6.5 obtenida en §3.6 habría que sumar ahora los esfuerzos correspondientes para cada subproblema. Por ejemplo, para el caso de la barra 12:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix}^{\text{Final}} = \begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix}^M \underset{\text{De Ec. 3.6.5}}{=} + \begin{pmatrix} -EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^I \quad (4.5.5)$$

Igualmente, habrá que considerar todos los subproblemas al calcular las reacciones del problema original. Por ejemplo, la reacción $\vec{\mathbf{F}}_1$ comprende dos componentes, una obtenida de M y otra del subproblema I :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{pmatrix}^{\text{Total}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{pmatrix}^M + \begin{pmatrix} 0 \\ EA\alpha\Delta T \\ 0 \end{pmatrix}^I \quad (4.5.6)$$

Obtenida como parte de $\vec{\mathbf{F}}_R$

4.6. Elementos “muelle”

Otro de los elementos que se encuentran comúnmente en estructuras son elementos elásticos o “muelles”. Se trata de elementos con una ley de comportamiento elástico lineal idealizada $F = ku$ o $M = k\theta$, siendo F y M las fuerzas o momentos aplicadas y u y θ el desplazamiento o giro conseguidos, respectivamente. Dependiendo de si actúan oponiéndose al desplazamiento en una dirección espacial (x o y) o a torsión oponiéndose a un giro (en θ), hablaremos de muelles “lineales” o de “torsión”, respectivamente. El único parámetro que caracteriza a dichos muelles es su constante de rigidez k , con unidades en el SI de N/m (Newtons/metro) o de Nm/rad (Newtons-metro/radián), respectivamente.

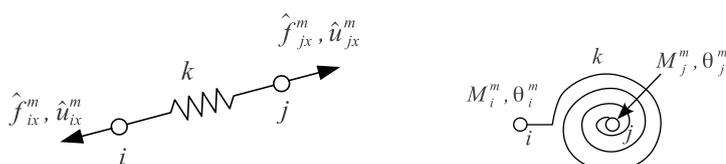


Figura 4.6.1: El elemento “muelle” lineal (izquierda) y de torsión (derecha).

A efectos de cálculo matricial de estructuras, un muelle lineal ideal se puede modelar exactamente igual que una barra biarticulada (cuyo modelo se vio en §2.2), donde el valor $\frac{EA}{L}$ que aparecía en su matriz de rigidez ahora es directamente la constante k del muelle. Es decir, el modelo matemático de un muelle m en coordenadas locales viene dado por:

$$\hat{\mathbf{f}}^m = \hat{\mathbf{K}}^m \hat{\mathbf{u}}^m$$

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ix}^m \\ 0 \\ \hat{f}_{jx}^m \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{u}_{ix}^m \\ 0 \\ \hat{u}_{jx}^m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.1)$$

Al igual que con cualquier otra barra, esta matriz en coordenadas

locales deberá modificarse mediante la correspondiente matriz de transformación dependiendo de la orientación del muelle. Las fórmulas son exactamente iguales al caso de una barra biarticulada:

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{T}^m \hat{\mathbf{K}}^m \mathbf{T}^{m\top} \quad (4.6.2)$$

donde la matriz de rotación \mathbf{T}^m viene dada por la Ec. 2.2.9.

Cuando se calcula una estructura que contiene un muelle, éste sólo afecta a la hora de ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura. Como se describió en §3.3, cada elemento (barra o muelle) situada entre dos nudos i y j debe tenerse en cuenta en cuatro lugares: los dos bloques diagonales \mathbf{K}_{ii} y \mathbf{K}_{jj} , y las dos entradas simétricas \mathbf{K}_{ij} y \mathbf{K}_{ji} .

Ahora bien, es un caso muy común encontrar muelles con uno de sus extremos (digamos, el j) anclado a un apoyo, mientras que el otro extremo (i) es el único unido a la estructura. En estos casos lo normal es ignorar el nudo del apoyo, no teniéndose en cuenta siquiera en la lista de grados de libertad del problema de cálculo matricial. Entonces, el único efecto que tiene un muelle es su aportación \mathbf{K}_{ii}^m a la diagonal de la matriz \mathbf{K} de rigidez global de la estructura. Un poco más adelante aclararemos el procedimiento con un ejemplo.

En cuanto a la aportación \mathbf{K}_{ii}^m del muelle a la matriz global, se puede calcular a partir de las ecuaciones 4.6.1–4.6.2. Sin embargo, para los casos de muelles anclados a un apoyo y en posición horizontal o vertical, sus matrices tienen formas extremadamente sencillas, por lo que se recomienda memorizarlas y usarlas directamente. Dichas matrices se muestran en la Figura 4.6.2(a)–(b) para muelles horizontales y verticales, respectivamente. Nótese que en ambos casos no importa la orientación del muelle: un muelle horizontal con su nudo libre i a la derecha es exactamente equivalente a otro muelle horizontal con su nudo libre a la izquierda. Lo mismo ocurre con los verticales.

Otro concepto importante relativo a muelles es que estos no restringen el movimiento en ningún grado de libertad. Esta es una confusión bastante habitual cuando se trata de muelles anclados a un apoyo en uno de sus extremos. Para dejarlo claro: los muelles no afectan para nada a

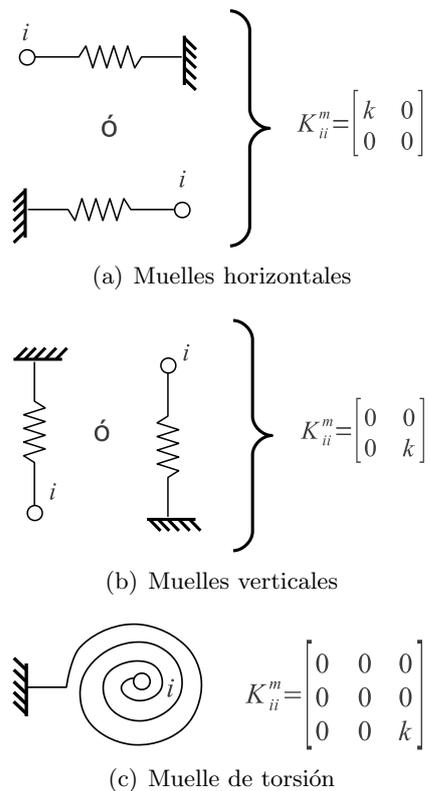


Figura 4.6.2: Matrices de rigidez (en coordenadas globales) para muelles (a) horizontales, (b) verticales y (c) de torsión.

la división en gdl libres y restringidos que hay que realizar en el método matricial (recordar §3.5).

Para ilustrar todo lo expuesto hasta ahora con un caso práctico, consideremos la estructura de la Figura 4.6.3, que contiene tres muelles.

Lo primero que observamos es que los apoyos donde los dos muelles lineales descansan ni siquiera se han numerado como nudos, y por lo tanto no entrarán en el modelo matemático de cálculo matricial. Es importante reiterar que esto es posible sólo por ser uno de los extremos de los muelles un apoyo inmóvil.

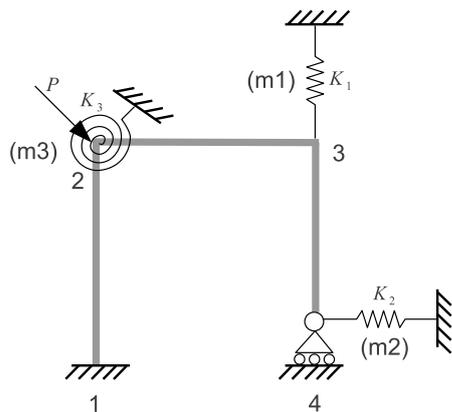


Figura 4.6.3: Ejemplo de estructura con elementos “muelle”.

Dividiendo los gdl en restringidos y libres (requerido para el método propuesto en §3.5), vemos que los restringidos son $\{u_{1x}, u_{1y}, \theta_1, u_{4y}\}$ mientras que los libres son $\{u_{2x}, u_{2y}, \theta_2, u_{3x}, u_{3y}, \theta_3, u_{4x}\}$. Observar como esta división es exactamente igual a la que se haría si no existiesen los muelles, ya que estos no afectan para nada en este punto.

El único efecto de los muelles serían unas entradas extra a la diagonal de la matriz de rigidez global de la estructura, que quedaría como sigue:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{12} & \mathbf{K}_{12}^{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{12} & \mathbf{K}_{22}^{12} + \mathbf{K}_{22}^{23} + \mathbf{K}_{22}^{m3} & \mathbf{K}_{23}^{23} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{32}^{23} & \mathbf{K}_{33}^{23} + \mathbf{K}_{33}^{34} + \mathbf{K}_{33}^{m1} & \mathbf{K}_{34}^{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{43}^{34} & \mathbf{K}_{44}^{34} + \mathbf{K}_{44}^{m2} \end{bmatrix}$$

donde se ha usado la notación \mathbf{K}_{ij}^{ab} para referirse a la parte relativa a los nudos i, j de la matriz de rigidez global de la barra $a \rightarrow b$. Para recordar el método de ensamblaje de esta matriz, referirse a la sección 3.3. Respecto al efecto de los muelles, se modelan mediante los tres términos \mathbf{K}_{22}^{m3} , \mathbf{K}_{33}^{m1} y \mathbf{K}_{44}^{m2} en la diagonal, y que valen:

$$\mathbf{K}_{22}^{m3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{33}^{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{44}^{m2} = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, no hay que perder de vista que aunque los apoyos en los que descansan los muelles $m1$ y $m2$ no se han modelado como variables en este problema, por supuesto siguen ejerciendo una reacción que habrá que tener en cuenta si es necesario. Si por ejemplo, en el problema del ejemplo se requiriese verificar el equilibrio de cargas externas y reacciones sobre la estructura, habrá que tener en cuenta las tres componentes de la reacción en 1 ($\vec{\mathbf{F}}_1$), la carga externa en 2 (P), el momento ejercido por el muelle en ese mismo nudo, la reacción vertical en 4 (\mathbf{f}_{4y}), y las dos reacciones transmitidas por los muelles desde sus apoyos hasta los nudos 3 y 4. El valor de dichas reacciones se puede calcular fácilmente a partir de la ley de comportamiento elástico, y valdrían $F_{m1} = k_1 u_{3y}$ y $F_{m2} = k_2 u_{4x}$ para los muelles $m1$ y $m2$, respectivamente, y $M_{m2} = k_3 \theta_2$ para el muelle de torsión.

4.7. Apoyos móviles no ortogonales

Como se explicó en §3.1, en cálculo matricial se manejan tres tipos de sistemas de coordenadas distintos: uno global, uno local para cada barra y uno local para cada nodo. Los locales de cada barra pueden coincidir o no con el global, con el que están relacionados a través de las matrices de rotación \mathbf{T} que vimos en el capítulo 2.

En esta sección nos interesan los sistemas de coordenadas nodales. Estos sólo se deben tener en cuenta cuando exista algún apoyo móvil (p.ej. un “carrito”) cuyo gdl libre sea *no ortogonal* al sistema de coordenadas globales. Es decir, cuando el apoyo permita deslizamientos sobre un plano inclinado en una dirección distinta a la de x o y global. Un ejemplo de dicha situación se da en el nudo 4 de la estructura mostrada en la Figura 4.7.1.

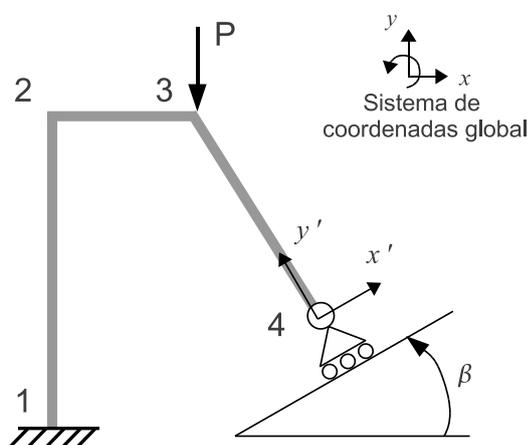


Figura 4.7.1: Ejemplo de estructura con un apoyo articulado no ortogonal al sistema de coordenadas global.

La necesidad de tratar como un caso especial estos apoyos móviles sobre planos inclinados se justifica pensando que uno de los primeros pasos a realizar al resolver la estructura es dividir los grados de libertad en libres y restringidos (recordar §3.5). Si observamos el nudo 4, veremos que sería imposible decidir cuáles de sus dos direcciones x e

y en coordenadas globales son libres o restringidas, ya que ambas son libres pero existe una ligadura entre ambas que las restringe, de forma que no pueden variar independientemente. La solución consiste en considerar las dos direcciones alternativas x' e y' , a las que llamaremos *coordenadas nodales*. La ventaja de estas coordenadas es que, ahora sí, podemos separar muy claramente el grado de libertad restringido (y') del libre (x').

A continuación se explica porqué el considerar estas coordenadas nodales no ortogonales a las globales nos forzará a modificar el sistema de ecuaciones global de la estructura, en forma matricial $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$, por una versión modificada $\vec{\mathbf{F}}' = \mathbf{K}'\vec{\mathbf{U}}'$.

Sea una estructura cualquiera con n nudos donde el i 'ésimo nudo se corresponde con un apoyo móvil sobre un plano inclinado. Dicha estructura se modela mediante los siguientes vectores de fuerzas ($\vec{\mathbf{F}}$) y desplazamientos ($\vec{\mathbf{U}}$) en coordenadas globales:

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_{i-1} \\ \vec{\mathbf{F}}_i \\ \vec{\mathbf{F}}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_n \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_{i-1} \\ \vec{\mathbf{U}}_i \\ \vec{\mathbf{U}}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_n \end{pmatrix} \quad (4.7.1)$$

relacionadas a través de la matriz de rigidez \mathbf{K} mediante $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$. Dicha matriz debe ensamblarse conforme a lo descrito en §3.3. Debido al apoyo móvil sobre el plano inclinado no podemos dividir las componentes de $\vec{\mathbf{U}}_i$ en grados de libertad libres y restringidos, por lo que aplicaremos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{T}_i \hat{\vec{\mathbf{f}}}_i^n \quad \vec{\mathbf{U}}_i = \mathbf{T}_i \hat{\vec{\mathbf{u}}}_i^n \quad (4.7.2)$$

donde se han introducido las fuerzas y desplazamientos del nudo i en *coordenadas nodales*, representadas por $\hat{\mathbf{f}}_i^n$ y $\hat{\mathbf{u}}_i^n$, respectivamente. Se usará el superíndice \cdot^n para denotar que se trata de un sistema de coordenadas nodal. Respecto a la matriz \mathbf{T}_i , se trata de una matriz de rotación similar a las descritas para transformar las matrices de rigidez locales de barras a coordenadas globales en el capítulo 2, dada por:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para un apoyo articulado (2 gdl) Para un apoyo rígido (3 gdl)

siendo β el ángulo desde el sistema de coordenadas global hasta el plano inclinado del apoyo, medido como se indica en la Figura 4.7.1.

Para llevar a cabo el cambio de coordenadas en las fuerzas y desplazamientos del nudo i , expandimos el sistema de ecuaciones $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$ y sustituimos los valores de la Ec. 4.7.2:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_{i-1} \\ \frac{\mathbf{T}_i \hat{\mathbf{f}}_i^n}{\vec{\mathbf{F}}_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_n \end{pmatrix} = \tag{4.7.3} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,i-1} & \mathbf{K}_{1,i} & \mathbf{K}_{1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{i-1,1} & \dots & \mathbf{K}_{i-1,i-1} & \mathbf{K}_{i-1,i} & \mathbf{K}_{i-1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{i-1,n} \\ \mathbf{K}_{i,1} & \dots & \mathbf{K}_{i,i-1} & \mathbf{K}_{i,i} & \mathbf{K}_{i,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{i,n} \\ \mathbf{K}_{i+1,1} & \dots & \mathbf{K}_{i+1,i-1} & \mathbf{K}_{i+1,i} & \mathbf{K}_{i+1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{n,1} & \dots & \mathbf{K}_{n,i-1} & \mathbf{K}_{n,i} & \mathbf{K}_{n,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_{i-1} \\ \frac{\mathbf{T}_i \hat{\mathbf{u}}_i^n}{\vec{\mathbf{U}}_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_n \end{pmatrix}$$

Dado que nuestro objetivo es ser capaces de plantear una división válida de los grados de libertad entre libres y restringidos, nos interesaría que en los vectores de fuerzas y desplazamientos solamente interviniesen $\hat{\mathbf{f}}_i^n$ y $\hat{\mathbf{u}}_i^n$, y no sus versiones en coordenadas globales $\vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{T}_i \hat{\mathbf{f}}_i^n$ y $\vec{\mathbf{U}}_i = \mathbf{T}_i \hat{\mathbf{u}}_i^n$, que son las que aparecen en la ecuación anterior.

Mediante las reglas del producto de matrices se puede demostrar que esto se consigue modificando las entradas de la matriz global \mathbf{K} que aparecen en la i ésimas filas y columnas, las marcadas entre líneas en la Ec. 4.7.3. De esta forma se llega a otra matriz de rigidez \mathbf{K}' que relaciona vectores de fuerzas y desplazamientos que en parte están en coordenadas globales y en parte en coordenadas nodales:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_{i-1} \\ \frac{\hat{\mathbf{f}}_i^n}{\hline} \\ \vec{\mathbf{F}}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{F}}_n \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbf{F}}'} = \quad (4.7.4)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,i-1} & \mathbf{K}_{1,i} \mathbf{T}_i & \mathbf{K}_{1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{i-1,1} & \dots & \mathbf{K}_{i-1,i-1} & \mathbf{K}_{i-1,i} \mathbf{T}_i & \mathbf{K}_{i-1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{i-1,n} \\ \mathbf{T}_i^\top \mathbf{K}_{i,1} & \dots & \mathbf{T}_i^\top \mathbf{K}_{i,i-1} & \mathbf{T}_i^\top \mathbf{K}_{i,i} \mathbf{T}_i & \mathbf{T}_i^\top \mathbf{K}_{i,i+1} & \dots & \mathbf{T}_i^\top \mathbf{K}_{i,n} \\ \mathbf{K}_{i+1,1} & \dots & \mathbf{K}_{i+1,i-1} & \mathbf{K}_{i+1,i} \mathbf{T}_i & \mathbf{K}_{i+1,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{n,1} & \dots & \mathbf{K}_{n,i-1} & \mathbf{K}_{n,i} \mathbf{T}_i & \mathbf{K}_{n,i+1} & \dots & \mathbf{K}_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}'} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_{i-1} \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}_i^n}{\hline} \\ \vec{\mathbf{U}}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{U}}_n \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbf{U}}'}$$

Será sobre este último sistema de ecuaciones sobre el que habrá que operar según lo descrito en §3.5 para resolver la estructura. Por ejemplo, cuando se extraiga la submatriz de rigidez correspondiente a los gdl libres

(llamada \mathbf{K}_{LL} en §3.5) se hará a partir de la matriz \mathbf{K}' de la Ec. 4.7.4 en lugar de a partir de la matriz \mathbf{K} original. Así mismo, hay que tener en cuenta que al obtener la solución a los desplazamientos de los gdl libres (el vector $\vec{\mathbf{U}}_L$), los gdl correspondientes al nudo i del plano inclinado (una parte de $\hat{\mathbf{u}}_i^n$) estarán dados en el sistema de coordenadas nodal.

4.8. Simplificación de barras por muelles

En esta sección estudiaremos un proceso de simplificación de estructuras, totalmente opcional, que aunque está basado en las matrices de rigidez vistas en este texto se puede aplicar igualmente a cualquier otro método de resolución de estructuras no matricial.

La idea consiste en reemplazar una barra o viga presente en una estructura por uno o dos muelles de tipo lineal o de torsión, de manera que la estructura simplificada se comporte exactamente igual con los muelles que con la barra. Si nos referimos a los nudos inicial y final de una barra cualquiera como i y j , respectivamente, el proceso es el esquematizado en la Figura 4.8.1. La ventaja de simplificar es la eliminación de uno de los nudos del problema (el i en la figura), reduciendo por tanto el número de incógnitas y el tamaño de la matriz de rigidez global.

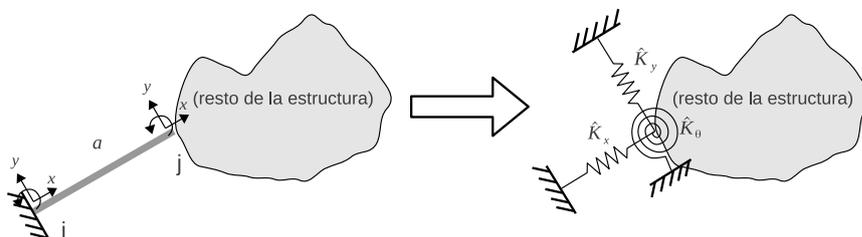


Figura 4.8.1: Una barra (izquierda) puede reemplazarse en determinadas circunstancias por uno o dos muelles escogidos de entre los tres mostrados en la estructura simplificada (derecha).

A nivel matemático, se debe asegurar que la matriz global de la estructura simplificada sea *idéntica* a la matriz de la estructura original (ignorando obviamente las filas y columnas relativas a los gdl que se dejan fuera del problema). En este sentido, estamos hablando de una *simplificación* en el número de gdl del problema, no de una *aproximación*. Eso sí, debemos avisar de que dependiendo del tipo de simplificación particular las reacciones obtenidas por el método de cálculo matricial en el nudo donde se añaden los muelles (el j en el ejemplo de arriba) pueden no ser las mismas que en la estructura original, lo que deberá ser tenido en cuenta.

Consideremos la matriz de rigidez (por comodidad, en coordenadas locales) de la barra a de la figura anterior:

$$\hat{\mathbf{K}}^a = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & \hat{\mathbf{K}}_{ij}^a \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a \end{array} \right] \quad (4.8.1)$$

Sabemos, por el método de ensamblaje visto en §3.3, que los términos $\hat{\mathbf{K}}_{ii}^a$ y $\hat{\mathbf{K}}_{jj}^a$ se sumarán a los bloques diagonales de la matriz global de la estructura de índices i y j , respectivamente.

El objetivo de las simplificaciones mediante muelles es eliminar del problema todos los gdl relativos al nudo i , y respecto al nudo j , que el bloque $\hat{\mathbf{K}}_{jj}^a$ se pueda aproximar, teniendo en cuenta los valores de los desplazamientos conocidos (parte del vector $\hat{\mathbf{U}}$), mediante una combinación de hasta tres muelles, tal que:

$$\hat{\mathbf{K}}^a \hat{\mathbf{U}}^a = \left[\begin{array}{c|ccc} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & & & \\ \hline & \hat{K}_{x_j} & \hat{K}_{x_j y_j} & \hat{K}_{x_j \theta_j} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & \hat{K}_{y_j x_j} & \hat{K}_{y_j} & \hat{K}_{y_j \theta_j} \\ & \hat{K}_{\theta_j x_j} & \hat{K}_{\theta_j y_j} & \hat{K}_{\theta_j} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{u}_{xi}^0 \\ \hat{u}_{yi}^0 \\ \hat{u}_{\theta i}^0 \\ \hat{u}_{xj} \\ \hat{u}_{yj} \\ \hat{u}_{\theta j} \end{pmatrix} \quad (4.8.2)$$

$$\equiv \left[\begin{array}{c|ccc} \hat{\mathbf{K}}_{ii}^a & & & \\ \hline & \hat{K}_x & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{ji}^a & 0 & \hat{K}_y & 0 \\ & 0 & 0 & \hat{K}_\theta \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{u}_{xi}^0 \\ \hat{u}_{yi}^0 \\ \hat{u}_{\theta i}^0 \\ \hat{u}_{xj} \\ \hat{u}_{yj} \\ \hat{u}_{\theta j} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\mathbf{K}}_{jj}^a = \begin{bmatrix} \hat{K}_{x_j} & \hat{K}_{x_j y_j} & \hat{K}_{x_j \theta_j} \\ \hat{K}_{y_j x_j} & \hat{K}_{y_j} & \hat{K}_{y_j \theta_j} \\ \hat{K}_{\theta_j x_j} & \hat{K}_{\theta_j y_j} & \hat{K}_{\theta_j} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \hat{K}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{K}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_\theta \end{bmatrix}$$

donde \hat{K}_x , \hat{K}_y y \hat{K}_θ son las tres constantes de elasticidad de dos muelles lineales en las direcciones de los ejes locales \hat{x} e \hat{y} y de un muelle de torsión, respectivamente. Alternativamente, podemos plantear la equivalencia con muelles colocados directamente siguiendo los ejes x e y globales si esto es conveniente, persiguiendo en este caso la equivalencia:

$$\mathbf{K}_{jj}^a = \begin{bmatrix} K_{x_j} & K_{x_j y_j} & K_{x_j \theta_j} \\ K_{y_j x_j} & K_{y_j} & K_{y_j \theta_j} \\ K_{\theta_j x_j} & K_{\theta_j y_j} & K_{\theta_j} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad (4.8.3)$$

En cualquier caso, los valores de las constantes de los muelles deberán ser los de las entradas correspondientes en la matriz de rigidez de la barra. Por ejemplo, en la Ec. 4.8.3 la constante del muelle en la dirección horizontal (K_x) tendría el valor de la entrada K_{x_j} de la matriz de rigidez de la barra.

Para concretar la discusión anterior, resumimos ahora **las dos condiciones que deben verificarse** para poder llevar a cabo la simplificación de una barra por muelles:

1. **Todos los gdl del nudo i deben tener desplazamientos y giros restringidos a cero, o no ser estudiados.** Por ejemplo, en una barra con unión del tipo articulada en su extremo i bastaría con que estuviese simplemente apoyada para asegurar que sus dos desplazamientos x e y sean nulos, siempre y cuando se modele mediante una matriz condensada (p.ej. de tamaño 4×4 o 5×5) en la que el giro en dicho nudo no entre en el problema.
2. **Que para el caso concreto a estudiar se cumpla la identidad de la Ec. 4.8.2, o su equivalente con coordenadas globales.**

Esto puede ocurrir bien porque todas las entradas de la submatriz de rigidez \mathbf{K}_{jj} que aparecen sombreadas en las Ec. 4.8.3–4.8.3 sean ceros, o bien porque puedan ignorarse si aparecen en filas y columnas cuyo desplazamiento correspondiente esté restringido a cero (p.ej. la primera fila y columna pueden ignorarse si el desplazamiento u_{xj} es cero, etc.).

Y en todo caso:

- **Solamente podrán añadirse muelles en gdl del nudo j que sean libres** ya que, evidentemente, un muelle aplicado en un gdl restringido no tiene efecto alguno.

La mejor manera de aclarar como llevar a la práctica estos puntos es verlos aplicados en ejemplos concretos:

Ejemplo 1

La barra cuya simplificación se estudia se encuentra empotrada en su extremo 1 y está rígidamente unida en el nudo 2 a otra barra que aquí no nos interesa. Analizando las restricciones de movimiento vemos que todos los gdl del nudo 1 son cero, así como lo están los gdl x e y del nudo 2.



Figura 4.8.2: Ejemplo de simplificación de una estructura con muelles.

Es decir, de los 6 gdl de la barra 12, solamente el giro θ_2 es libre y es por tanto una incógnita. Es inmediato verificar la condición número 1 indicada arriba, ya que en este caso todos los gdl del nudo origen (u_{1x} , u_{1y} y θ_1) están restringidos a cero. Para comprobar la condición número 2 planteamos ahora la expresión $\vec{\mathbf{F}}^{12} = \mathbf{K}^{12}\vec{\mathbf{U}}^{12}$ (en coordenadas globales) usando la matriz de rigidez que vimos en §2.3:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{F}}^{12} &= \mathbf{K}^{12} \vec{\mathbf{U}}^{12} \quad (4.8.4) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x}^a \\ u_{1y}^a \\ \theta_1^a \\ \hline u_{2x}^a \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{u_{1x}^a} \\ \cancel{u_{1y}^a} \\ \cancel{\theta_1^a} \\ \hline \cancel{u_{2x}^a} \\ \cancel{u_{2y}^a} \\ \cancel{\theta_2^a} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Las entradas de la matriz de rigidez cuyas filas y columnas (ambas) corresponden a gdl con movimientos restringidos aparecen sombreadas en la igualdad inferior. Respecto a la submatriz de rigidez que nos interesa (\mathbf{K}_{22} , la inferior derecha), tenemos que comprobar si se puede aproximar por una matriz donde todas las entradas no diagonales sean o bien ceros o bien corresponder a elementos sombreados. En este caso podemos ver que sí es así:

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{EA}{L}} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{12EI}{L^3}} & \cancel{-\frac{6EI}{L^2}} \\ 0 & \cancel{-\frac{6EI}{L^2}} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_x = 0 \\ K_y = 0 \\ K_\theta = \frac{4EI}{L} \end{cases} \quad (4.8.5)$$

y de esta forma verificamos que de los tres muelles posibles, en este caso solamente es necesario emplear un muelle de torsión con la constante de elasticidad indicada para reemplazar la barra, tal y como se muestra en la derecha de la Figura 4.8.2.

Ejemplo 2

En este caso la barra a simplificar se encuentra simplemente apoyada en su extremo 1 y rígidamente unida en el nudo 2 a otra barra.



Figura 4.8.3: Ejemplo de simplificación de una estructura con muelles.

Para que se verifique la condición número 1 vista arriba, todos los gdl del nudo 1 deben estar o restringidos o no ser estudiados. Como el giro θ_1 no está restringido, nos vemos forzados a considerar para la barra un modelo de matriz condensada de 5×5 del tipo articulada-rígida (ver §2.5.2) si queremos realizar la simplificación. Una vez seleccionada esta matriz, se puede comprobar que efectivamente sí que podemos simplificar la barra por un único muelle de torsión con un valor $K_\theta = \frac{3EI}{L}$. Al ser este caso muy similar al anterior, no lo explicamos tan en detalle y dejamos como ejercicio al lector que haga el razonamiento del que se deduce el valor para la constante del muelle.

Ejemplo 3

A continuación vemos otra modificación más sobre el mismo problema anterior, ahora mediante la liberación de la restricción del movimiento del nudo 1 en la dirección horizontal:



Figura 4.8.4: Ejemplo de simplificación de una estructura con muelles.

La intención de este ejemplo es llamar la atención sobre la primera condición para simplificar, la que dice que el nudo de origen (el 1) debe tener todos sus gdl forzados a un desplazamiento nulo o no estudiarse. A primera vista este caso y el ejemplo 2 de la Figura 4.8.3 son distintos, pero en ausencia de cargas, sabemos que el desplazamiento horizontal del nudo 1 será nulo, y por lo tanto los dos problemas son exactamente equivalentes a pesar del distinto apoyo, y ambas barras pueden simplificarse por el mismo muelle de torsión en el nudo 2. Hay que incidir en que esta equivalencia sólo es válida en ausencia de cargas que impliquen movimiento en el gdl u_{1x} .

Ejemplo 4

Tratamos de simplificar ahora la barra 12, empotrada en su extremo inferior y unida mediante articulación a un carrito que permite desplazamiento vertical:

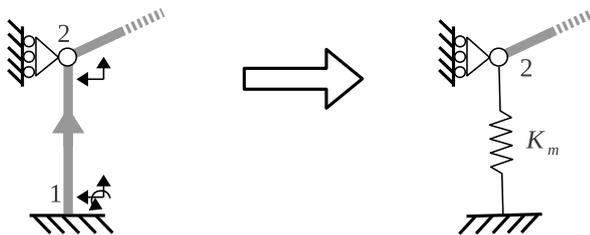


Figura 4.8.5: Ejemplo de simplificación de una estructura con muelles.

De los seis posibles gdl de una barra, los tres correspondientes al nudo 1 deben estudiarse al estar su desplazamiento restringido a cero, mientras que en su otro extremo podemos no estudiar el giro θ_2 . De esta forma se cumple la primera condición para simplificar, ya que $\hat{u}_{1x} = \hat{u}_{1y} = \theta_1 = 0$.

Sobre la segunda condición, desarrollamos la expresión $\hat{\mathbf{F}}^{12} = \hat{\mathbf{K}}^{12}\hat{\mathbf{U}}^{12}$ (por simplicidad, en coordenadas locales) usando la matriz de rigidez condensada para barras rígido-articuladas que vimos en §2.5.3:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}^{12} &= \hat{\mathbf{K}}^{12}\hat{\mathbf{U}}^{12} & (4.8.6) \\ &= \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{u}_{1x}^a \\ \hat{u}_{1y}^a \\ \theta_1^a \\ \hat{u}_{2x}^a \\ \hat{u}_{2y}^a \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \hat{u}_{1x}^a \rightarrow 0 \\ \hat{u}_{1y}^a \rightarrow 0 \\ \theta_1^a \rightarrow 0 \\ \hat{u}_{2x}^a \\ \hat{u}_{2y}^a \rightarrow 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se han sombreado las entradas de la matriz de rigidez cuyas filas y columnas (ambas) corresponden a gdl con movimientos restringidos (todas excepto la entrada de la cuarta fila y columna). Comprobamos ahora si se puede aproximar la submatriz del extremo final ($\hat{\mathbf{K}}_{22}$) por una matriz donde todas las entradas no diagonales sean o ceros o correspondan a elementos sombreados:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array} \right] &\equiv \left[\begin{array}{cc} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} K_{\hat{x}} & 0 \\ 0 & K_{\hat{y}} \end{array} \right] & (4.8.7) \\ &\rightarrow \begin{cases} K_{\hat{x}} = \frac{EA}{L} \\ K_{\hat{y}} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y efectivamente en este caso también se cumple por lo que la barra se puede reemplazar por un muelle lineal de constante $\frac{EA}{L}$ en la dirección del eje local \hat{x} , tal y como se muestra en la derecha de la Figura 4.8.5.

Ejemplo 5

Observamos ahora la barra 12, simplemente apoyada en su extremo superior y empotrada en el inferior:

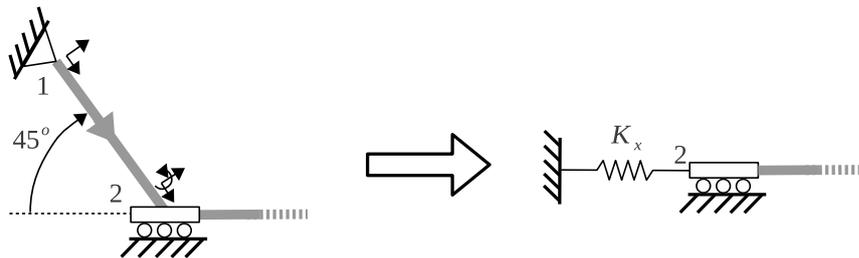


Figura 4.8.6: Ejemplo de simplificación de una estructura con muelles.

Los dos gdl de desplazamientos del nudo origen (el 1) están restringidos a cero quedando el giro θ_1 libre, por lo que tenemos que considerar una matriz condensada en caso de querer simplificar la barra. En el nudo 2 están restringidos el desplazamiento vertical y el giro, por lo que el único gdl libre donde podríamos colocar un muelle es en el desplazamiento horizontal, siguiendo la dirección del eje x global. Por ello planteamos la expresión $\vec{\mathbf{F}}^{12} = \mathbf{K}^{12}\vec{\mathbf{U}}^{12}$ en coordenadas globales, tomando la matriz de rigidez condensada para una barra articulada-rígida de §2.5.2 y teniendo en cuenta que la orientación de la barra es de $\phi = -45^\circ$:

$$\vec{\mathbf{F}}^{12} = \mathbf{K}^{12}\vec{\mathbf{U}}^{12} = \mathbf{T}(\phi)\hat{\mathbf{K}}^{12}\mathbf{T}(\phi)^\top\vec{\mathbf{U}}^{12} \quad (4.8.8)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{T}(\phi) \left[\begin{array}{cc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi)^\top \begin{pmatrix} u_{1x}^a \\ u_{1y}^a \\ u_{2x}^a \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_{1x}^a \\ u_{1y}^a \\ u_{2x}^a \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \phi & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_{1x}^a \\ u_{1y}^a \\ u_{2x}^a \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \phi & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \begin{pmatrix} \cancel{u_{1x}^a}^0 \\ \cancel{u_{1y}^a}^0 \\ u_{2x}^a \\ \cancel{u_{2y}^a}^0 \\ \cancel{\theta_2^a}^0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde se han vuelto a sombrar las entradas de la matriz de rigidez cuyas filas y columnas corresponden a gdl con movimientos restringidos. Igualamos ahora la submatriz del extremo final (\mathbf{K}_{22} , en globales) a una matriz diagonal:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \phi & \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \\
& \equiv \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix} \tag{4.8.9} \\
& \rightarrow \begin{cases} K_x = \frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \phi \stackrel{\phi=-45^\circ}{=} \frac{EA}{2L} + \frac{3EI}{2L^3} \\ K_y = 0 \\ K_\theta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos el valor de la constante de rigidez del muelle horizontal con el que podemos reemplazar la barra, como se ve en la Figura 4.8.6.

Contraejemplo 1

Igualmente importante que saber simplificar una barra por muelles es ser conscientes de cuando no es posible realizar dicha simplificación, situación que veremos con unos ejemplos.

Sea la barra 12 unida a un empotramiento deslizante en su extremo 1 y rígidamente unida a otra barra en el otro:

Podemos ver que no se cumple la primera condición de asegurar que todos los gdl del nudo origen (el 1) estén restringidos a movimientos nulos. Y al contrario de lo que ocurría con el ejemplo 3, en este caso no podemos asegurar que el desplazamiento vertical u_{1y} vaya a ser cero por

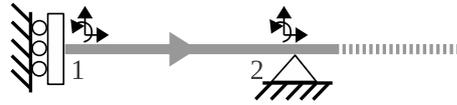


Figura 4.8.7: Barra para estudio de su posible simplificación por muelles.

ausencia de cargas, con lo que rápidamente desechamos la posibilidad de reemplazarla por muelles.

Contraejemplo 2

Consideremos la barra 12, empotrada en 1 y unida rígidamente a otra en su otro extremo:

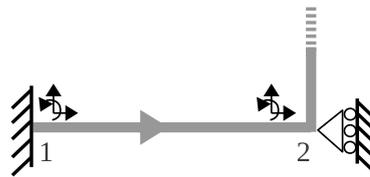


Figura 4.8.8: Barra para estudio de su posible simplificación por muelles.

De los 6 gdl de la barra, todos están restringidos salvo el desplazamiento u_{2y} y el giro θ_2 . En caso de poder simplificar la barra por muelles, estarían en dichos gdl. Vemos que se verifica la condición número 1 para simplificaciones al estar todos los gdl en el nudo origen restringidos. Para verificar la segunda condición, planteamos la expresión $\vec{\mathbf{F}}^{12} = \mathbf{K}^{12}\vec{\mathbf{U}}^{12}$ en coordenadas globales:

$$\vec{\mathbf{F}}^{12} = \mathbf{K}^{12}\vec{\mathbf{U}}^{12} \quad (4.8.10)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_{1x}^a \\ u_{1y}^a \\ \theta_1^a \\ \hline u_{2x}^a \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \cancel{u_{1x}^a} \\ \cancel{u_{1y}^a} \\ \cancel{\theta_1^a} \\ \hline \cancel{u_{2x}^a} \\ u_{2y}^a \\ \theta_2^a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde hemos sombreado las entradas correspondientes a gdl restringidos. Si ahora comprobamos la posibilidad de igualar la submatriz del extremo final (\mathbf{K}_{22} , la inferior derecha) a una matriz donde todas las entradas no diagonales sean o bien ceros o bien corresponder a elementos sombreados vemos que:

$$\left[\begin{array}{ccc} \cancel{\frac{EA}{L}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \neq \left[\begin{array}{ccc} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{array} \right]$$

es decir, que *en este caso no podemos simplificar la barra por muelles* al existir relaciones cruzadas entre los gdl libres, como revelan los elementos no nulos fuera de la diagonal.

4.9. Comprobación del equilibrio de esfuerzos, acciones y reacciones

La comprobación del equilibrio en alguno o todos los nudos de una estructura no forma estrictamente parte del proceso de resolución, sino que es más bien una manera de verificar que los resultados obtenidos son consistentes, y por tanto, probablemente libres de errores. Es importante señalar igualmente que este procedimiento no es específico para cálculo matricial de estructuras, por lo que podría aplicarse a cualquier otro método de resolución.

El proceso de comprobación del equilibrio para un cierto nudo i consiste en reunir todas las acciones (cargas externas *puntuales*), reacciones (en caso de tratarse de un apoyo) y esfuerzos (para cada una de las barras que incidan en el nudo) y representarlas tal y como actúan sobre el nudo, teniendo especial cuidado en la dirección y sentido de cada fuerza y momento. A continuación, se debe verificar que se cumplen las tres ecuaciones de equilibrio para el punto del nudo i :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{cases} \quad (4.9.1)$$

siendo F_x y F_y las componentes horizontales y verticales de cada una de las fuerzas, respectivamente.

Ilustraremos el proceso con el ejemplo de la Figura 4.9.1(a), donde a un nudo i se aplica una carga puntual P , y llegan dos barras (a y b) unidas entre sí rígidamente y también un cable (c) que se modela como una barra biarticulada.

Como se muestra en la Figura 4.9.1(b), se deben plantear todas las fuerzas que actúan sobre el nudo. Para contar el efecto de todas las barras se puede asumir que todas ellas han sido “cortadas” muy cerca del nudo (en teoría, infinitesimalmente cerca). En cada punto de corte aparecerán, en el lado de la barra, los esfuerzos axiales (N), cortantes (V) y el momento flector (M) de dicha barra, y en el lado del nudo, las

reacciones de cada una de estas fuerzas y momentos. En definitiva, las fuerzas que se muestran encerradas por la línea discontinua son todas las que actúan sobre el nudo i , y todas ellas, en conjunto, deben cumplir con las tres condiciones de la Ec. 4.9.1.

Para completar esta sección, se darán algunas aclaraciones sobre casos especiales que se pueden encontrar a la hora de verificar el equilibrio de fuerzas en un nudo:

- Si el nudo en cuestión es un apoyo, habrá que tener en cuenta la fuerza de la reacción, que se corresponde con $\vec{\mathbf{F}}_i$ en nuestra notación de cálculo matricial.
- A la hora de tener en cuenta los esfuerzos de las barras y las reacciones de un posible apoyo, habrá que tener cuidado de usar los valores *totales* si el problema se ha abordado mediante superposición de una serie de subproblemas.
- En caso de existir un muelle aplicado sobre el nudo, no olvidar que éste también ejercen una fuerza $\vec{\mathbf{F}}^m = \mathbf{K}^m \vec{\mathbf{U}}_i$ que deberá ser tenida en cuenta.
- Sólo se contarán las fuerzas externas cuando sean puntuales aplicadas precisamente en el nudo en cuestión. Las cargas distribuidas, de temperatura o de otro tipo que afecten a las distintas barras podrán dar lugar a cargas nodales equivalentes sobre el nudo i , pero estas no se contarán a efectos de verificar el equilibrio. La razón es que dichas fuerzas ya están realmente siendo tenidas en cuenta a través de los esfuerzos de cada barra.

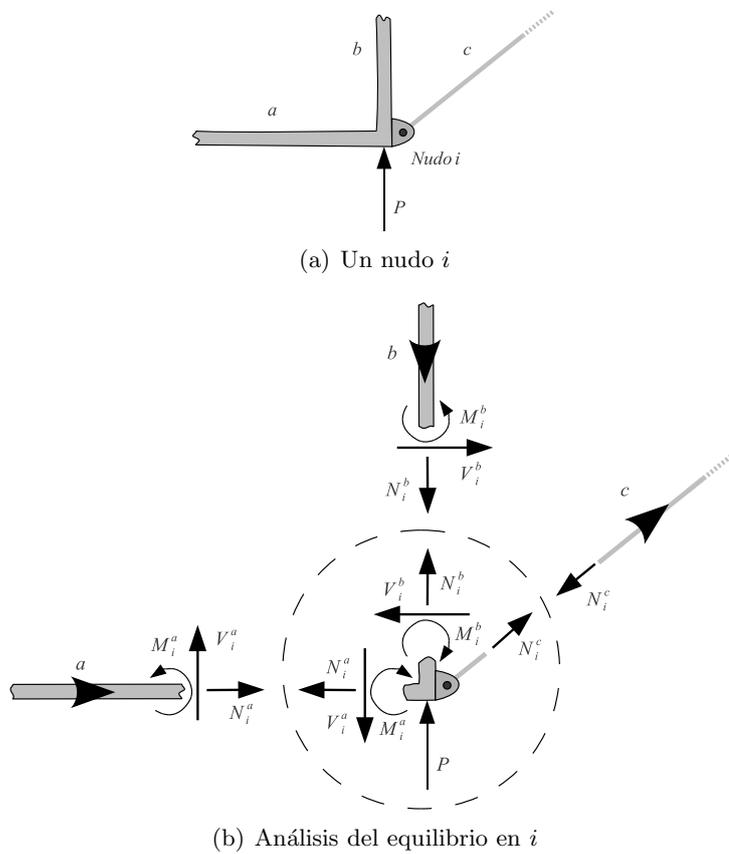


Figura 4.9.1: (a) Caso de estudio para análisis de equilibrio en un nudo i .
(b) Descomposición de todos los esfuerzos de las barras y sus efectos en el nudo considerado aislado.

5.1. Problema 1 (estructura articulada simple)

Sea la estructura articulada de la Figura 5.1.1, donde todas las barras tienen una sección $A = 2\text{cm}^2$, la unidad de longitud L vale $0,5\text{m}$ y la carga P vale 1000N . Se pide determinar los desplazamientos de todos los nudos y los esfuerzos de las barras por el método de cálculo matricial (Dato: $E = 200.000 \text{ N/mm}^2 = 200 \text{ GPa}$)

Resolución:

En primer lugar escribimos de forma ordenada la longitud, sección y orientación de cada barra¹, datos que necesitaremos más adelante:

¹Asumiendo que la conectividad de las barras es tal que en el sistema local de coordenadas de la barra el eje \hat{x} está orientado desde i hacia j , siendo $i < j$ (lo que no es obligatorio, se podrá elegir entre las dos direcciones posibles siempre y cuando se respete la decisión cuidadosamente en todos los cálculos). La orientación ϕ refleja el ángulo entre este eje y el eje x global.

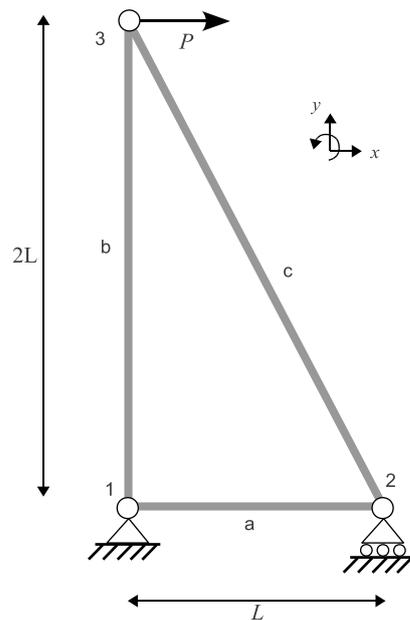


Figura 5.1.1: La estructura de barras articuladas más sencilla: un triángulo. El sistema de coordenadas global tiene sus ejes orientados como se muestra en la parte superior derecha.

Barra	L	A	ϕ
a	L	A	0°
b	$2L$	A	90°
c	$L\sqrt{5}$	A	$116,565^\circ$

Como se ve, intentaremos arrastrar mientras sea posible los valores simbólicos de las variables en lugar de sus valores numéricos, pues hará más cómodo trabajar y evitará errores.

El vector de solicitaciones \mathbf{F} contiene los 3 vectores (en *coordenadas globales*) de fuerzas para cada nudo, de 2 elementos cada uno: dos reacciones (como máximo) por cada apoyo articulado o las dos componentes de la carga en un nudo articulado (ver Figura 3.4.1). De forma análoga se define el vector global de desplazamientos \mathbf{U} (también en *coordenadas*

globales), con las 2 componentes del desplazamiento (en x e y) para cada nudo o apoyo del problema.

Ambos vectores están relacionados por medio de la matrix de rigidez del problema \mathbf{K} :

$$\mathbf{F}_{6 \times 1} = \mathbf{K}_{6 \times 6} \mathbf{U}_{6 \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{u}}_1 \\ \vec{\mathbf{u}}_2 \\ \vec{\mathbf{u}}_3 \\ u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

Si ahora procedemos a montar las submatrices de \mathbf{K} de acuerdo a lo explicado en §3.3, tendremos:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^a + \mathbf{K}_{11}^b & \mathbf{K}_{12}^a & \mathbf{K}_{13}^b \\ \mathbf{K}_{12}^{a \top} & \mathbf{K}_{22}^a + \mathbf{K}_{22}^c & \mathbf{K}_{23}^c \\ \mathbf{K}_{13}^{b \top} & \mathbf{K}_{23}^{c \top} & \mathbf{K}_{33}^b + \mathbf{K}_{33}^c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{u}}_1 \\ \vec{\mathbf{u}}_2 \\ \vec{\mathbf{u}}_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

Se describe a continuación el cálculo de cada una de las submatrices:

Barra a: Esta barra tiene orientación $\phi_a = 0^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11}^a &= T(\phi_a)\hat{\mathbf{K}}_{11}^a T(\phi_a)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{22}^a \\
 \mathbf{K}_{12}^a &= T(\phi_a)\hat{\mathbf{K}}_{12}^a T(\phi_a)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{21}^{a\top}
 \end{aligned}$$

Barra b: Esta barra tiene orientación $\phi_b = 90^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11}^b &= T(\phi_b)\hat{\mathbf{K}}_{11}^b T(\phi_b)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{33}^b \\
 \mathbf{K}_{13}^b &= T(\phi_b)\hat{\mathbf{K}}_{13}^b T(\phi_b)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{21}^{b\top}
 \end{aligned}$$

Barra c: Esta barra tiene orientación $\phi_c = 116,565^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{22}^c &= T(\phi_c)\hat{\mathbf{K}}_{22}^c T(\phi_c)^\top \\
 &= \begin{bmatrix} -0,446 & -0,895 \\ 0,895 & -0,446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,446 & 0,895 \\ -0,895 & -0,446 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0,7123 & -1,4286 \\ -1,4286 & 2,8654 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{33}^c \\
 \mathbf{K}_{23}^c &= T(\phi_c)\hat{\mathbf{K}}_{23}^c T(\phi_c)^\top
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -0,446 & -0,895 \\ 0,895 & -0,446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,446 & 0,895 \\ -0,895 & -0,446 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0,7123 & 1,4286 \\ 1,4286 & -2,8654 \end{bmatrix} 10^7 = \mathbf{K}_{32}^c{}^\top
\end{aligned}$$

Con esto ya podemos reescribir la Ec. 5.1.2 con sus valores numéricos:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ 0 \\ f_{2y} \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline -8 & 0 & 8,7123 & -1,4286 & -0,7123 & 1,4286 \\ 0 & 0 & -1,4286 & 2,8654 & 1,4286 & -2,8654 \\ \hline 0 & 0 & -0,7123 & 1,4286 & 0,7123 & -1,4286 \\ 0 & -4 & 1,4286 & -2,8654 & -1,4286 & 6,8654 \end{array} \right] 10^7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Siguiendo la estrategia de resolución explicada en §3.5, dividiremos los vectores $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{U}}$ en dos partes: una parte R con las variables correspondientes a componentes restringidas y otra parte L con las componentes libres. En este caso:

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2y} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2y} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix}$$

Y la misma división debe aplicarse a la matriz \mathbf{K} , que se particiona de la manera que sigue:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 8,7123 & -1,4286 & -0,7123 & 1,4286 \\ 0 & 0 & -1,4286 & 2,8654 & 1,4286 & -2,8654 \\ 0 & 0 & -0,7123 & 1,4286 & 0,7123 & -1,4286 \\ 0 & -4 & 1,4286 & -2,8654 & -1,4286 & 6,8654 \end{bmatrix} 10^7 \Rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{RR} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,8654 \end{bmatrix} 10^7$$

$$\mathbf{K}_{LL} = \begin{bmatrix} 8,7123 & -0,7123 & 1,4286 \\ -0,7123 & 0,7123 & -1,4286 \\ 1,4286 & -1,4286 & 6,8654 \end{bmatrix} 10^7$$

Por lo que podemos plantear la siguiente ecuación para despejar el valor de los desplazamientos desconocidos $\vec{\mathbf{U}}_L$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_R \\ \vec{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_R \\ \vec{\mathbf{U}}_L \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_L &= \mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R + \mathbf{K}_{LL}\vec{\mathbf{U}}_L \Rightarrow \vec{\mathbf{U}}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\vec{\mathbf{F}}_L - \underbrace{\mathbf{K}_{LR}\vec{\mathbf{U}}_R}_{\text{Cero}}) \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{U}}_L &= \mathbf{K}_{LL}^{-1}\vec{\mathbf{F}}_L \\ \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,252 & 1,284 & 0 \\ 1,252 & 25,379 & 5,0205 \\ 0 & 5,014 & 2,5 \end{bmatrix} 10^{-8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,0000125 \\ 0,00025379 \\ 0,0000514 \end{pmatrix} \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

Ya que se ha obtenido el vector $\vec{\mathbf{U}}$ completo (conocíamos la parte $\vec{\mathbf{U}}_R$ y acabamos de obtener $\vec{\mathbf{U}}_L$), estamos en condiciones de calcular el vector de fuerzas de la estructura $\vec{\mathbf{F}}$, por medio de:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} &= \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 8,7123 & -1,4286 & -0,7123 & 1,4286 \\ 0 & 0 & -1,4286 & 2,8654 & 1,4286 & -2,8654 \\ 0 & 0 & -0,7123 & 1,4286 & 0,7123 & -1,4286 \\ 0 & -4 & 1,4286 & -2,8654 & -1,4286 & 6,8654 \end{bmatrix} 10^7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0000125 \\ 0 \\ 0,00025379 \\ 0,0000514 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1000 \\ -2000 \\ 0 \\ 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (N) \quad (5.1.3)$$

Una vez hallados los desplazamientos de todos los nudos, también podemos proceder a calcular los esfuerzos de las barras. Denotando los esfuerzos axiales y cortantes como N_i^α y V_i^α , respectivamente, tenemos:

Barra a , cuyos nudos son 1 y 2:

$$\begin{pmatrix} -N_1^a \\ -V_1^a \\ N_2^a \\ V_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{1x}^a \\ \hat{f}_{1y}^a \\ \hat{f}_{2x}^a \\ \hat{f}_{2y}^a \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{\mathbf{K}}_{11}^a & \hat{\mathbf{K}}_{12}^a & & \\ \hat{\mathbf{K}}_{21}^a & \hat{\mathbf{K}}_{22}^a & & \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi_a)^\top \bar{\mathbf{u}}^a$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Siendo: } \bar{\mathbf{u}}^a = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,284 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (N)$$

Barra b , cuyos nudos son 1 y 3:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -N_1^b \\ -V_1^b \\ N_3^b \\ V_3^b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{f}_{1x}^b \\ \hat{f}_{1y}^b \\ \hat{f}_{3x}^b \\ \hat{f}_{3y}^b \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{11}^b & \hat{\mathbf{K}}_{13}^b \\ \hat{\mathbf{K}}_{31}^b & \hat{\mathbf{K}}_{33}^b \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi_b)^\top \vec{\mathbf{u}}^b \\
& \left(\begin{array}{l} \text{Siendo: } \vec{\mathbf{u}}^b = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} -\frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{EA}{2L} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \times \\
& \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5379 \cdot 10^{-4} \\ 5,14 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2000 \\ 0 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{N})
\end{aligned}$$

Barra c, cuyos nudos son 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} -N_2^c \\ -V_2^c \\ N_3^c \\ V_3^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{2x}^c \\ \hat{f}_{2y}^c \\ \hat{f}_{3x}^c \\ \hat{f}_{3y}^c \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{22}^c & \hat{\mathbf{K}}_{23}^c \\ \hat{\mathbf{K}}_{32}^c & \hat{\mathbf{K}}_{33}^c \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi_c)^\top \vec{\mathbf{u}}^c$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Siendo: } \vec{u}^c = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{pmatrix} \right) \\
 = & \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 & -\frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 & \frac{EA}{L\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \times \\
 & \left[\begin{array}{cc|cc} -0,446 & 0,895 & 0 & 0 \\ 0,895 & -0,446 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0,446 & 0,895 \\ 0 & 0 & 0,895 & -0,446 \end{array} \right] \begin{pmatrix} 1,284 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 2,5379 \cdot 10^{-4} \\ 5,14 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} 2236,068 \\ 0 \\ -2236,068 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{N})
 \end{aligned}$$

Estos resultados se resumen gráficamente en la Figura 5.1.2.

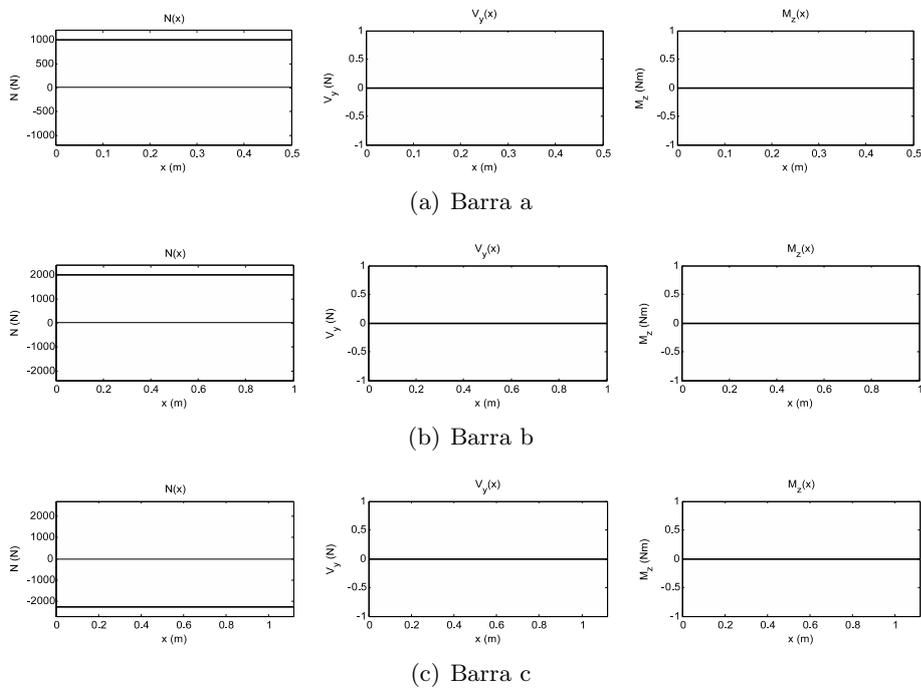


Figura 5.1.2: Esfuerzo axial $N(x)$, cortante $V_y(x)$ y momento flector $M_z(x)$ de las distintas barras a lo largo de sus eje longitudinales (variable x). Al consistir este problema enteramente en barras articuladas y no existir cargas más que en los nudos, los únicos esfuerzos que aparecen son axiales y constantes.

5.2. Problema 2 (con barras rígido-articuladas)

Sea la estructura con nudos rígidos y articulados de la Figura 5.2.1, donde la distancia L es de 1m , la carga lateral P vale 1 T y la carga distribuida q es de 2T/m . Si las barras tienen un perfil IPE-200 (área de sección $A = 28,5\text{cm}^2$, momento de inercia de sección $I_z = 1940\text{cm}^4$), se pide calcular los esfuerzos de todas las barras (Dato: $E = 210.000\text{ N/mm}^2$).

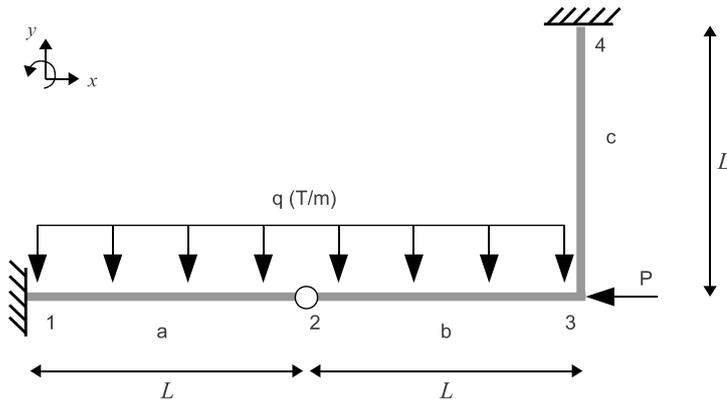


Figura 5.2.1: Estructura del ejemplo.

Resolución:

El primer paso es determinar los grados de libertad que se calcularán mediante el método matricial. Al existir cargas fuera de los nudos (la carga distribuida q sobre las barras a y b) se hace necesario particionar el problema en subproblemas, de forma tal que la suma de las soluciones de cada uno de ellos resuelva el problema propuesto. Distintas formas de llevar a cabo la partición afectan a los grados de libertad del problema. En este caso optaremos por esta división:

donde I y II son problemas estándar de resistencia de materiales con soluciones conocidas, y M es el problema que se resolverá por cálculo matricial, donde ya solamente existen fuerzas en los nudos. Observar en M cómo se han introducido fuerzas ficticias en los nudos 2 y 3 para compensar las reacciones de los *empotramientos ficticios* de las barras a

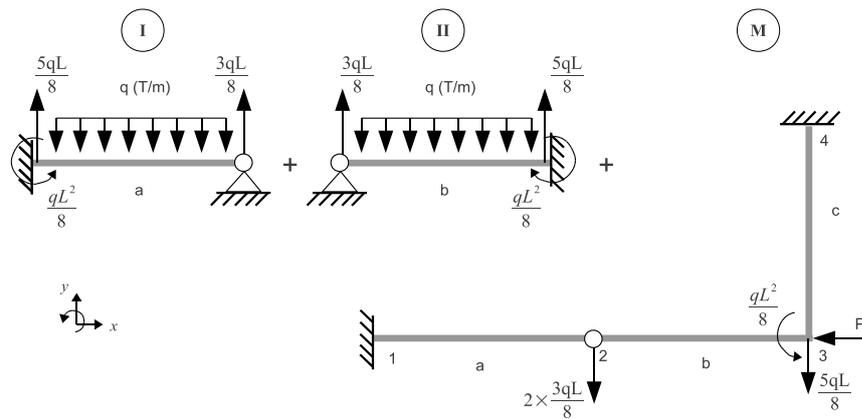


Figura 5.2.2: Los tres subproblemas en que se divide el ejercicio.

y b . En el nudo 1 esto no es necesario ya que ese empotramiento es real, no ficticio, porque formaba parte del problema.

Por lo tanto, los grados de libertad que se tendrán en cuenta son los siguientes, reflejados en los vectores de solicitaciones \vec{F} y desplazamientos \vec{U} :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \\ \vec{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ 0 \\ -\frac{3qL}{4} \\ -P \\ -\frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix}_{11 \times 1}$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \\ \vec{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{11 \times 1} \quad (5.2.1)$$

donde ya se han marcado en distintos colores las dimensiones libres (L) y las restringidas (R) y se han sustituido los valores de los datos conocidos.

La siguiente tabla resume los datos y el modelo que se usará para cada barra:

Barra	L	A	ϕ	Modelo
a	L	A	0°	Rígida-Articulada
b	L	A	0°	Articulada-Rígida
c	L	A	90°	Rígida-Rígida

Otra opción sería haber modelado la barra b como rígida-articulada y asumir una orientación de 180° en lugar de 0° , con lo que se podría reutilizar la matriz calculada para la barra a . Más aún, otra alternativa de planteamiento del problema sería modelar los problemas I y II como barras biempotradas, en cuyo caso el nudo 2 tendrá otros dos grados de libertad extra, los dos ángulos de giro de las barras a y b en dicho nudo.

Las matrices de rigidez de cada barra son:

Barra a: Esta barra tiene orientación $\phi_a = 0^\circ$:

$$\mathbf{K}^a = T(\phi_a)\hat{\mathbf{K}}^a T(\phi_a)^\top$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} T(\phi_a) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & \mathbf{0}_{2 \times 3} & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hat{\mathbf{K}}^a = \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cc} 59,85 & 0 & 0 & -59,85 & 0 \\ 0 & 1,22 & 1,22 & 0 & -1,22 \\ 0 & 1,22 & 1,22 & 0 & -1,22 \\ \hline -59,85 & 0 & 0 & 59,85 & 0 \\ 0 & -1,22 & -1,22 & 0 & 1,22 \end{array} \right] 10^7 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11}^a & \mathbf{K}_{12}^a \\ \mathbf{K}_{21}^a & \mathbf{K}_{22}^a \end{array} \right]$$

Barra b: Esta barra tiene orientación $\phi_b = 0^\circ$:

$$\mathbf{K}^b = T(\phi_b)\hat{\mathbf{K}}^b T(\phi_b)^\top$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} T(\phi_b) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline & & \mathbf{0}_{2 \times 3} & & \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hat{\mathbf{K}}^b = \left[\begin{array}{cc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|ccc} 59,85 & 0 & -59,85 & 0 & 0 \\ 0 & 1,22 & 0 & -1,22 & 1,22 \\ \hline -59,85 & 0 & 59,85 & 0 & 0 \\ 0 & -1,22 & 0 & 1,22 & -1,22 \\ 0 & 1,22 & 0 & -1,22 & 1,22 \end{array} \right] 10^7 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{22}^b & \mathbf{K}_{23}^b \\ \mathbf{K}_{32}^b & \mathbf{K}_{33}^b \end{array} \right]$$

Barra c: Esta barra tiene orientación $\phi_c = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^c &= T(\phi_c) \hat{\mathbf{K}}^c T(\phi_c)^\top \\ &= \left(\begin{array}{c} T(\phi_c) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hat{\mathbf{K}}^c = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right] \end{array} \right) \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4,89 & 0 & -2,44 & -4,89 & -0 & -2,44 \\ 0 & 59,85 & 0 & -0 & -59,85 & 0 \\ -2,44 & 0 & 1,6296 & 2,44 & -0 & 0,81 \\ \hline -4,89 & -0 & 2,44 & 4,89 & 0 & 2,44 \\ -0 & -59,85 & -0 & 0 & 59,85 & -0 \\ -2,44 & 0 & 0,81 & 2,44 & -0 & 1,6296 \end{array} \right] 10^7 \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{33}^c & \mathbf{K}_{34}^c \\ \mathbf{K}_{43}^c & \mathbf{K}_{44}^c \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ahora montamos las submatrices de \mathbf{K} según lo explicado en §3.3:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{F}}_1 \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \\ \vec{\mathbf{F}}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^a & \mathbf{K}_{12}^a & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^a & \mathbf{K}_{22}^a + \mathbf{K}_{22}^b & \mathbf{K}_{23}^b & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{32}^b & \mathbf{K}_{33}^b + \mathbf{K}_{33}^c & \mathbf{K}_{34}^c \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{43}^c & \mathbf{K}_{44}^c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{U}}_1 \\ \vec{\mathbf{U}}_2 \\ \vec{\mathbf{U}}_3 \\ \vec{\mathbf{U}}_4 \end{pmatrix} \quad (5.2.2)$$

Rellenando ahora todos estos valores en la matriz de rigidez global \mathbf{K} tenemos:

$$\begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4 \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 59,85 & 0 & 0 & -59,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,22 & 1,22 & 0 & -1,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,22 & 1,22 & 0 & -1,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -59,85 & 0 & 0 & 119,7 & 0 & -59,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,22 & -1,22 & 0 & 2,44 & 0 & -1,22 & 1,22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -59,85 & 0 & 64,74 & 0 & -2,44 & -4,89 & -0 & -2,44 & 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,22 & 0 & 61,07 & -1,22 & -0 & -59,85 & 0 & 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,22 & -2,44 & -1,22 & 2,8518 & 2,44 & -0 & 0,81 & 10^7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,89 & -0 & 2,44 & 4,89 & 0 & 2,44 & 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -59,85 & -0 & 0 & 59,85 & -0 & 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,44 & 0 & 0,81 & 2,44 & -0 & 1,63 & 10^7 \end{bmatrix}$$

Si ahora particionamos la matriz de rigidez global según la división RL indicada en la Ec. 5.2.1, tendremos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{LL} = \begin{bmatrix} 119,7 & 0 & -59,85 & 0 & 0 \\ 0 & 2,44 & 0 & -1,22 & 1,22 \\ -59,85 & 0 & 64,7388 & 0 & -2,44 \\ 0 & -1,22 & 0 & 61,0722 & -1,22 \\ 0 & 1,22 & -2,44 & -1,22 & 2,8518 \end{bmatrix} 10^7$$

de donde podemos despejar los desplazamientos desconocidos $\vec{\mathbf{U}}_L$ a partir del vector de fuerzas conocidas $\vec{\mathbf{F}}_L$ y la matrix \mathbf{K}_{LL} :

$$\vec{\mathbf{U}}_L = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_L = \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3qL}{4} \\ -P \\ -\frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14700 \\ -9800 \\ -12250 \\ 2450 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \end{matrix}$$

despejando $\vec{\mathbf{U}}_L$ como:

$$\vec{\mathbf{U}}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1}(\vec{\mathbf{F}}_L - \underbrace{\mathbf{K}_{LR} \vec{\mathbf{U}}_R}_{\text{Es cero}})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{K}_{LL}^{-1} \vec{\mathbf{F}}_L \\
&= \begin{bmatrix} 0,161 & -0,084 & 0,1556 & 0,00172 & 0,17 \\ -0,084 & 5,312 & -0,1685 & 0,05845 & -2,4 \\ 0,156 & -0,168 & 0,31 & 0,00344 & 0,34 \\ 0,0017 & 0,058 & 0,0034 & 0,1659 & 0,049 \\ 0,17 & -2,3993 & 0,34 & 0,049 & 4,848 \end{bmatrix} 10^{-8} \begin{pmatrix} 0 \\ -14700 \\ -9800 \\ -12250 \\ 2450 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1,095 \cdot 10^{-6} \\ -8,314506 \cdot 10^{-4} \\ 2,19 \cdot 10^{-6} \\ -2,805 \cdot 10^{-5} \\ 4,32102 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m) \\ (m) \\ (m) \\ (m) \\ (rad) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)
\end{aligned}$$

En este punto ya conocemos todos los desplazamientos del problema. Queda pendiente calcular las fuerzas de las reacciones de los apoyos, que aparecen en el vector $\vec{\mathbf{F}}_R$. Si se realiza el cálculo con un ordenador, es más fácil sin embargo calcular directamente el vector completo $\vec{\mathbf{F}}$ (del que $\vec{\mathbf{F}}_R$ es un subconjunto), ya que este tiene la sencilla expresión $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}}$, que en este caso nos da:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -655,25 \\ 10161,99 \\ 10161,99 \\ 0 \\ -14700 \\ -9800 \\ -12250 \\ 2450 \\ 10455,25 \\ 16788,01 \\ 3467,24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

donde las reacciones son las fuerzas y momentos de los nudos 1 y 4.

En este punto ya se ha resuelto completamente el subproblema M por el método de cálculo matricial. A los vectores de la solución, \vec{U} y \vec{F} , habrá que sumarles ahora los correspondientes para los problemas de resistencia de materiales, analizados a continuación.

El resultado final del problema consistirá, tanto para los vectores de fuerzas como para los esfuerzos de cada barra, en las sumas de los obtenidos en los tres subproblemas.

Subproblema I: Carga distribuida en barra rígida-articulada

En este problema aparecen reacciones en el empotramiento de la izquierda (empotramiento real del problema), más la reacción vertical en la derecha que se introduce con la restricción de que los nudos no deben desplazarse en un subproblema:

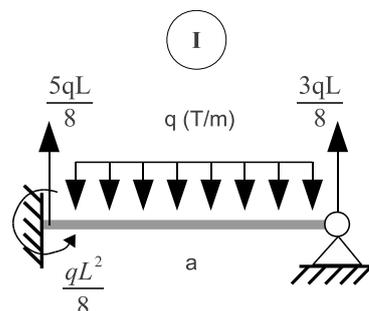


Figura 5.2.3: Subproblema I. Los nudos del problema son el 1 (izquierda) y el 2 (derecha).

El vector de fuerzas correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{pmatrix}^I = \begin{pmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{1y} \\ m_1 \\ \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \end{pmatrix}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{3qL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12250 \\ 2450 \\ 0 \\ 7350 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \\ (N) \\ (N) \end{matrix} \quad (5.2.6)$$

El esfuerzo cortante $V_a^I(x)$ y el momento flector $M_a^I(x)$ de esta barra a a lo largo de su eje x (con origen en el nudo izquierdo) vienen dados por:

$$\begin{aligned} V_a^I(x) &= -\frac{5ql}{8} + qx \\ M_a^I(x) &= \frac{q}{8}(-L^2 + 5Lx - 4x^2) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Subproblema II: Carga distribuida en barra articulada-rígida

Este es simplemente la versión simétrica del problema anterior:

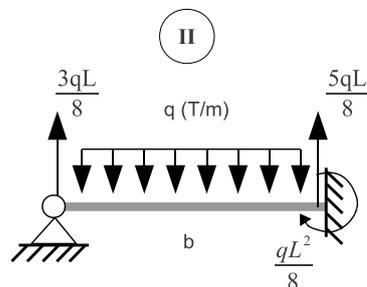


Figura 5.2.4: Subproblema II. Los nudos del problema son el 2 (izquierda) y el 3 (derecha).

En este caso el vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_2 \\ \hat{\mathbf{F}}_3 \end{pmatrix}^{II} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{2x} \\ \hat{f}_{2y} \\ \hat{f}_{3x} \\ \hat{f}_{3y} \\ m_3 \end{pmatrix}^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3qL}{8} \\ 0 \\ \frac{5qL}{8} \\ -\frac{qL^2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7350 \\ 0 \\ 12250 \\ -2450 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (Nm) \end{matrix} \quad (5.2.8)$$

El esfuerzo cortante $V_b^{II}(x)$ y el momento flector $M_b^{II}(x)$ de esta barra b a lo largo de su eje x son:

$$\begin{aligned} V_b^{II}(x) &= -\frac{3ql}{8} + qx \\ M_b^{II}(x) &= \frac{q}{8}(3Lx - 4x^2) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Cálculo de reacciones en apoyos

Para calcular las reacciones en los nudos 1 y 4, simplemente hay que tener en cuenta que hemos de considerar los tres subproblemas simultáneamente. En este caso, el subproblema I solamente afecta a la reacción del nudo 1, y el subproblema II no afecta a ninguna reacción.

- *Reacción en nudo 1:* Debemos sumar las aportaciones del cálculo matricial (subproblema M) y de la carga distribuida de la barra a (subproblema I).

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_1 &= \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{F}}_1^I + \vec{\mathbf{F}}_1^M = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \end{pmatrix} + \vec{\mathbf{F}}_1^M \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 12250 \\ 2450 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -655,25 \\ 10161,99 \\ 10161,99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -655,25 \\ 22411,9897 \\ 12611,9897 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \end{matrix} \end{aligned}$$

- *Reacción en nudo 4*: En este caso solamente influye la solución del problema matricial, por lo que:

$$\vec{\mathbf{F}}_4 = \begin{pmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_4 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{F}}_4^M = \begin{pmatrix} 10455,25 \\ 16788,01 \\ 3467,24 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \end{matrix} \quad (5.2.10)$$

Cálculo de esfuerzos en cada barra

- *Barra a* ($1 \rightarrow 2$): Dado que los esfuerzos en coordenadas locales vienen dados por $\hat{\mathbf{f}}^a = \hat{\mathbf{K}}^a \mathbf{T}(\phi_a)^\top \vec{\mathbf{U}}^a$ y conocemos todos los desplazamientos en coordenadas globales $\vec{\mathbf{U}}$ (ver Ec. 5.2.4), podemos calcular dichos esfuerzos como sigue:

$$\begin{pmatrix} -N_1^a \\ -V_1^a \\ -M_1^a \\ \frac{N_2^a}{V_2^a} \end{pmatrix}^M = \begin{pmatrix} \hat{f}_{1x}^a \\ \hat{f}_{1y}^a \\ \frac{m_1^a}{\hat{f}_{2x}^a} \\ \hat{f}_{2y}^a \end{pmatrix}^M = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{11}^a & \hat{\mathbf{K}}_{12}^a \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_{21}^a & \hat{\mathbf{K}}_{22}^a \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi_a)^\top \vec{\mathbf{u}}^a$$

$$\left(\text{Siendo: } \vec{\mathbf{u}}^a = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -655,253 \\ 10161,99 \\ 10161,99 \\ \frac{655,253}{-10161,99} \end{pmatrix}^M \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \\ (N) \\ (N) \end{matrix}$$

a lo que hay que sumar los esfuerzos del subproblema de resistencia de materiales descritos en las Ec. 5.2.6–5.2.7. Los esfuerzos resultantes a lo largo del eje de la barra se muestran detalladamente en la Figura 5.2.5, aunque es sencillo calcular manualmente al menos los valores en los extremos de la barra:

$$\begin{pmatrix} N_1^a \\ V_1^a \\ \frac{M_1^a}{N_2^a} \\ V_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1^a \\ V_1^a \\ \frac{M_1^a}{N_2^a} \\ V_2^a \end{pmatrix}^I + \begin{pmatrix} N_1^a \\ V_1^a \\ \frac{M_1^a}{N_2^a} \\ V_2^a \end{pmatrix}^M$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -12250 \\ -2450 \\ 7350 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 655,253 \\ -10161,99 \\ -10161,99 \\ 655,253 \\ -10161,99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655,253 \\ -22411,99 \\ -12611,99 \\ 655,253 \\ -2811,99 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \\ (N) \\ (N) \end{matrix}$$

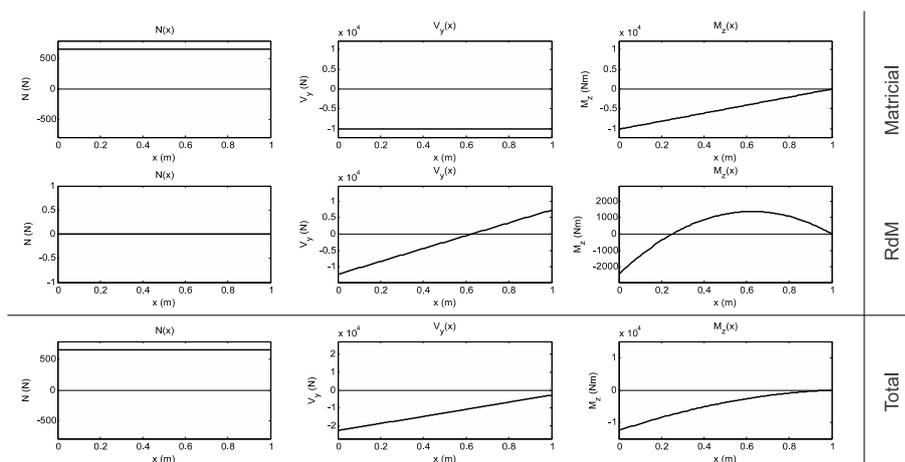


Figura 5.2.5: Esfuerzo axial $N(x)$, cortante $V_y(x)$ y momento flector $M_z(x)$ de la barra a .

- *Barra b* ($2 \rightarrow 3$): En este caso procedemos de igual manera, calculando primero los esfuerzos según el cálculo matricial para la barra en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -N_2^b \\ -V_2^b \\ N_3^b \\ V_3^b \\ M_3^b \end{pmatrix}^M &= \begin{pmatrix} \hat{f}_{2x}^b \\ \hat{f}_{2y}^b \\ \hat{f}_{3x}^b \\ \hat{f}_{3y}^b \\ m_3^b \end{pmatrix}^M = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{22}^b & \hat{\mathbf{K}}_{23}^b \\ \hat{\mathbf{K}}_{32}^b & \hat{\mathbf{K}}_{33}^b \end{bmatrix} \mathbf{T}(\phi_b)^\top \bar{\mathbf{u}}^b \\ & \left(\text{Siendo: } \bar{\mathbf{u}}^b = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -655,253 \\ -4538,01 \\ 655,253 \\ 4538,01 \\ -4538,01 \end{pmatrix}^M \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (Nm) \\ (N) \\ (N) \end{matrix} \end{aligned}$$

a lo que en este caso hay que sumar los resultados del subproblema II (ver Ec. 5.2.8–5.2.9). Los resultados exactos se muestran en la Figura 5.2.6, siendo los valores en los extremos de la barra:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_2^b \\ V_2^b \\ N_3^b \\ V_3^b \\ M_3^b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_2^b \\ V_2^b \\ N_3^b \\ V_3^b \\ M_3^b \end{pmatrix}^{II} + \begin{pmatrix} N_2^b \\ V_2^b \\ N_3^b \\ V_3^b \\ M_3^b \end{pmatrix}^M \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 7350 \\ 0 \\ 12250 \\ -2450 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 655,253 \\ 4538,01 \\ 655,253 \\ 4538,01 \\ -4538,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655,253 \\ -2811,99 \\ 655,253 \\ 16788,01 \\ -6988,01 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (Nm) \end{matrix} \end{aligned}$$

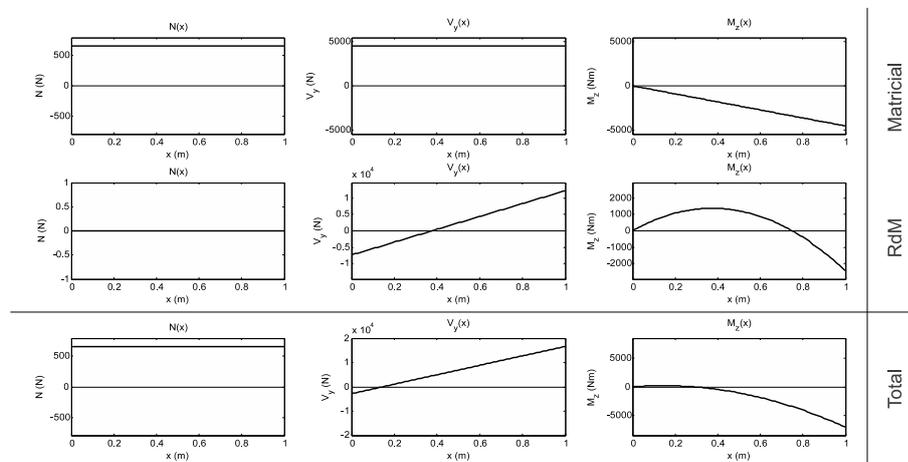


Figura 5.2.6: Esfuerzo axial $N(x)$, cortante $V_y(x)$ y momento flector $M_z(x)$ de la barra b .

- *Barra c* ($3 \rightarrow 4$): Como en esta barra no existen cargas distribuidas, sus esfuerzos se pueden calcular únicamente a partir de la solución del problema matricial (representados en la Figura 5.2.7):

$$\begin{pmatrix} -N_3^c \\ -V_3^c \\ -M_3^c \\ N_4^c \\ V_4^c \\ M_4^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{3x}^c \\ \hat{f}_{3y}^c \\ m_3^c \\ \hat{f}_{4x}^c \\ \hat{f}_{4y}^c \\ m_4^c \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{K}}_{33}^b & \hat{\mathbf{K}}_{34}^b \\ \hat{\mathbf{K}}_{43}^b & \hat{\mathbf{K}}_{44}^b \end{array} \right] \mathbf{T}(\phi_c)^\top \bar{\mathbf{u}}^c$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \text{Siendo: } \vec{u}^c = \begin{pmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 & = \begin{pmatrix} -16788,01 \\ 10455,253 \\ 6988,01 \\ 16788,01 \\ -10455,253 \\ 3467,243 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \text{(N)} \\ \text{(Nm)} \\ \text{(N)} \\ \text{(N)} \\ \text{(Nm)} \end{array}
 \end{aligned}$$

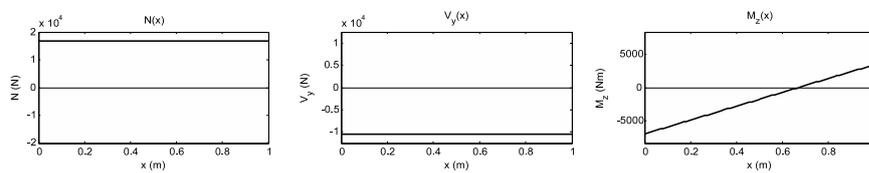


Figura 5.2.7: Esfuerzo axial $N(x)$, cortante $V_y(x)$ y momento flector $M_z(x)$ de la barra c .

5.3. Problema 3 (simplificaciones y deslizadera)

Sea la estructura de la Figura 5.3.1, donde la distancia D es de 2m, la carga P es de 1T y la carga distribuida q de 100Kg/m. Si las barras tienen un perfil IPE-200 (área de sección $A = 28,5\text{cm}^2$, momento de inercia de sección $I_z = 1940\text{cm}^4$), se pide calcular el desplazamiento vertical de los nudos 2 y 5 (Dato: $E = 210.000\text{ N/mm}^2$).

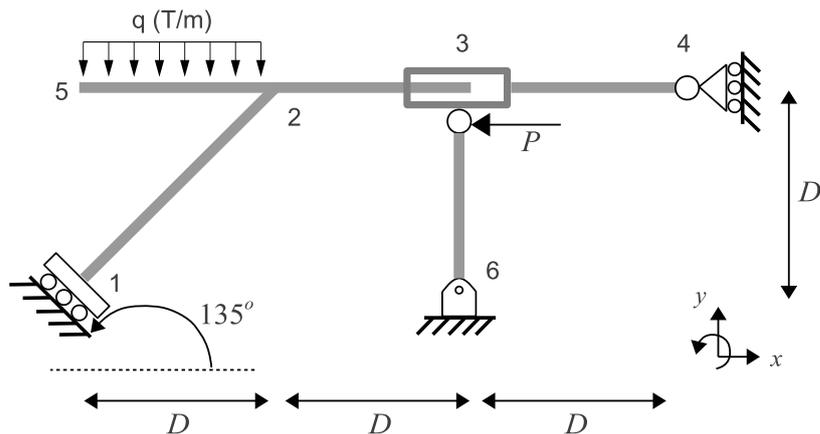


Figura 5.3.1: Estructura a considerar en el problema.

Resolución:

Al existir cargas no nodales, lo primero que hay que hacer es llevarse esas cargas a subproblemas que se estudian por separado, como se muestra en la Figura 5.3.2.

Aquí, I es un problema estándar de resistencia de materiales con solución conocida para el voladizo, y M es el problema a resolver por cálculo matricial. En este último problema ya se han introducido las cargas nodales equivalentes en el nudo 2 y además se ha reemplazado la barra 36 por un muelle para no tener que tratar el nudo 6 en el problema (las reglas para simplificaciones por muelles se vieron en §4.8). Una manera alternativa de enfrentar la división en subproblemas hubiera sido empotrando también el lado izquierdo del voladizo

Sobre la elección de la orientación para el sistema de coordenadas

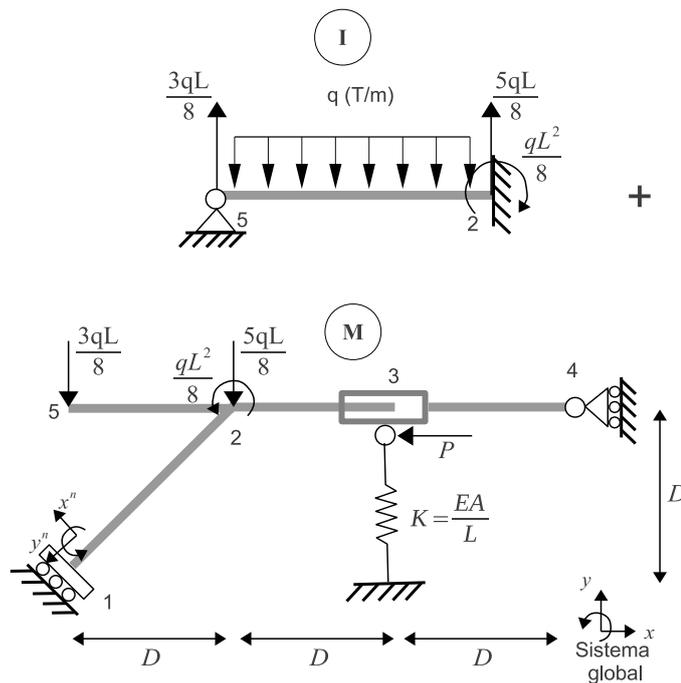


Figura 5.3.2: El subproblema (I) para el voladizo, y el problema (M) que se resolverá por matricial, incluyendo ya todas las simplificaciones.

globales, sabemos que es una buena opción colocarlo siguiendo o bien una deslizadera o bien un plano con apoyo deslizante, si es que en un problema existe alguno de esos elementos. Como en este caso existen ambos elementos (deslizadera y plano inclinado) y no siguen la misma dirección, nos vemos obligados a colocar el sistema global siguiendo uno de ellos (por ejemplo, la deslizadera, tal y como ya se muestra en la Figura 5.3.1) y usar la técnica descrita en §4.7 para tratar el apoyo.

Al determinar qué gdl existen en el problema, uno de los puntos que más dudas puede generar es la deslizadera del nudo 3. A este nudo confluyen tres barras, de las cuales la 23 y la 34 comparten un giro al que llamaremos $\theta_3^{23,34}$ o θ_3 por simplificar. La barra 36 se une mediante articulación al nudo 3, por lo que su giro no tiene por qué estudiarse (y de

hecho no lo haremos, al haber simplificado dicha barra por un muelle). Respecto al desplazamiento horizontal, el esquema nos dice que las barras 34 y 36 lo comparten, mientras que la 23 tiene otro desplazamiento independiente. Todas comparten un mismo desplazamiento vertical. Otro punto susceptible de duda es qué gdl estudiar en el extremo 5 del voladizo. En este caso se podría optar por estudiar el giro θ_5 o por no estudiarlo y ambas opciones serían válidas mientras se eligiese el modelo de matriz correcto (de 6×6 o condensado de 5×5 , respectivamente). Aquí elegiremos no estudiarlo para reducir el tamaño de la matriz global.

En resumen, los grados de libertad a estudiar son los siguientes, donde ya hemos coloreado los gdl libres (L) y los restringidos (R):

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1^n \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \\ \vec{\mathbf{F}}_4 \\ \vec{\mathbf{F}}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{1x}^n \\ \hat{f}_{1y}^n \\ M_1^n \\ \hline f_{2x} \\ f_{2y} \\ M_2 \\ \hline f_{3x}^{23} \\ f_{3x}^{34} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ \hline f_{4x} \\ f_{4y} \\ \hline f_{5x} \\ f_{5y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{f}_{1y}^n \\ M_1^n \\ \hline 0 \\ -\frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ \hline f_{4x} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3qL}{8} \end{pmatrix}_{14 \times 1}$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}_1^n \\ \vec{\mathbf{U}}_2 \\ \vec{\mathbf{U}}_3 \\ \vec{\mathbf{U}}_4 \\ \vec{\mathbf{U}}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1x}^n \\ \hat{u}_{1y}^n \\ \theta_1^n \\ \hline u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ \hline u_{3x}^{23} \\ u_{3x}^{34} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ \hline u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1x}^n \\ 0 \\ 0 \\ \hline u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ \hline u_{3x}^{23} \\ u_{3x}^{34} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ \hline 0 \\ u_{4y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{pmatrix}_{14 \times 1} \tag{5.3.1}$$

y donde los valores marcados como $\hat{\cdot}^n$ están en coordenadas nodales del sistema asociado al nudo 1 (ver Figura 5.3.2).

La siguiente tabla resume los datos y el tratamiento (tipo de matriz) que se usará para cada barra:

Barra	L	ϕ	Modelo
12	$D\sqrt{2}$	45°	Rígida-Rígida (6×6)
23	D	0°	Rígida-Rígida (6×6)
34	D	0°	Rígida-Articulada (5×5)
25	D	180°	Rígida-Articulada (6×5)

Procedemos a ensamblar las diversas submatrices que componen la matriz global de la estructura \mathbf{K} según lo explicado en §3.3 y teniendo en cuenta el cambio a coordenadas nodales del nudo 1 según vimos en §4.7, llegando al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \hat{\vec{\mathbf{F}}}_1^n \\ \vec{\mathbf{F}}_2 \\ \vec{\mathbf{F}}_3 \\ \vec{\mathbf{F}}_4 \\ \vec{\mathbf{F}}_5 \end{pmatrix} = \quad (5.3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^\top \mathbf{K}_{11}^{12} \mathbf{T} & \mathbf{T}^\top \mathbf{K}_{12}^{12} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathbf{K}_{22}^{12} + \mathbf{K}_{22}^{23} + \mathbf{K}_{22}^{25} & \mathbf{K}_{23}^{23} & 0 & \mathbf{K}_{25}^{25} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{K}_{33}^{23} + \mathbf{K}_{33}^{34} + \mathbf{K}_{33}^m & \mathbf{K}_{34}^{34} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{K}_{44}^{34} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{K}_{55}^{25} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\mathbf{U}}}_1^n \\ \vec{\mathbf{U}}_2 \\ \vec{\mathbf{U}}_3 \\ \vec{\mathbf{U}}_4 \\ \vec{\mathbf{U}}_5 \end{pmatrix}$$

donde los bloques de la mitad inferior izquierda se han omitido por ser la matriz \mathbf{K} simétrica y \mathbf{T} es la matriz de rotación para el cambio de coordenadas nodales del nudo 1 con $\beta = 135^\circ$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 & -0,707 & 0 \\ 0,707 & -0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

La única peculiaridad que encontramos en el proceso de ensamblaje de este problema en comparación con anteriores ejemplos es la necesidad de orlar las matrices de las barras que indican en la deslizadera. El proceso consiste en introducir filas y columnas de ceros en los lugares adecuados de las matrices de cada barra según los gdl que cada barra “no vea”, como detallamos en §4.1. Por ejemplo, operando obtenemos que la matriz en globales para la barra 23 es:

$$\mathbf{K}^{23} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{22}^{23} & \mathbf{K}_{23}^{23} \\ \hline \mathbf{K}_{32}^{23} & \mathbf{K}_{33}^{23} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 299,2 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 \\ 0 & 6,11 & 6,11 & 0 & -6,11 & 6,11 \\ 0 & 6,11 & 8148000 & 0 & -6,11 & 4,074 \\ \hline -299,2 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 \\ 0 & -6,11 & -6,11 & 0 & 6,11 & -6,11 \\ 0 & 6,11 & 4,074 & 0 & -6,11 & 8148000 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \\ x_3^{23} \\ y_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

mientras que a la hora de ensamblar el bloque \mathbf{K}_{33}^{23} necesitamos que sea de tamaño 4×4 , por lo que tenemos que rellenarla con ceros como sigue:

$$\mathbf{K}_{33}^{23} = \left[\begin{array}{cccc} 299,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,11 & -6,11 \\ 0 & 0 & -6,11 & 8148000 \end{array} \right] \begin{array}{l} x_3^{23} \\ x_3^{34} \\ y_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

El proceso es similar para el resto de submatrices, y finalmente se llega a la matriz global de la estructura que se muestra en la Ec. 5.3.6. A continuación, nos quedamos solamente con la parte de esta matriz que involucra a los gdl libres, cuyos desplazamientos son una incógnita y queremos obtener. Siguiendo la notación habitual, llamaremos a esta submatriz \mathbf{K}_{LL} , y plantearemos el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{K}_{LL} \mathbf{U}_L \quad (5.3.4)$$

donde \mathbf{F}_L y \mathbf{U}_L son los vectores de cargas externas conocidas y desplazamientos desconocidos, respectivamente. No hay que olvidar que en ambos vectores, los gdl relativos al nudo 1 que se manejan están en coordenadas nodales. Sustituyendo los valores numéricos llegamos al sistema de la Ec. 5.3.7, que tras resolver invirtiendo la matriz \mathbf{K}_{LL} nos da la solución del problema:

$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1x}^n \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ u_{3x}^{23} \\ u_{3x}^{34} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,01914 \text{ m} \\ 0,0095 \text{ m} \\ -0,0095 \text{ m} \\ 0,0041 \text{ rad} \\ 0,0095 \text{ m} \\ -0,000030 \text{ m} \\ -0,000007 \text{ m} \\ 0,0050 \text{ rad} \\ 0,0101 \text{ m} \\ 0,0095 \text{ m} \\ -0,0181 \text{ m} \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

de donde podemos extraer los dos desplazamientos verticales que nos piden: $u_{2y} = -0,95 \text{ cm}$ y $u_{5y} = -1,81 \text{ cm}$, finalizando la resolución del problema.

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{bmatrix}
 2,16 & 0 & 3,06 & 1,53 & -1,53 & 3,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 211,6 & 0 & 149,6 & 149,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3,06 & 0 & 5,762 & 2,161 & -2,161 & 2,881 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1,53 & 149,6 & 2,161 & 705,4 & 104,7 & 2,161 & -299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 \\
 -1,53 & 149,6 & -2,161 & 104,7 & 114,5 & 0,895 & 0 & 0 & -6,11 & 6,11 & 0 & 0 & 0 & -1,53 & 0 \\
 3,06 & 0 & 2,881 & 2,161 & 0,895 & 20,02 & 0 & 0 & -6,11 & 4,074 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,06 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -6,11 & -6,11 & 0 & 0 & 306,888 & -3,06 & 0 & -1,53 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 6,11 & 4,074 & 0 & 0 & -3,06 & 14,259 & -0 & -3,06 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & -0 & 299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,53 & -3,06 & 0 & 1,53 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1,53 & 3,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,53 & 0
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 \hat{u}_{1x}^n \\
 \hat{u}_{1y}^n \\
 \theta_1^n \\
 \hline
 u_{2x} \\
 u_{2y} \\
 \theta_2 \\
 \hline
 u_{3x}^{23} \\
 u_{3x}^{34} \\
 u_{3y} \\
 \theta_3 \\
 \hline
 u_{4x} \\
 u_{4y} \\
 \hline
 u_{5x} \\
 u_{5y}
 \end{matrix} \quad (5.3.6)$$

$$\begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -\frac{5qL}{8} \\
 \frac{qL^2}{8} \\
 0 \\
 0 \\
 -P \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\frac{3qL}{8}
 \end{pmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix}
 2,16 & 1,53 & -1,53 & 3,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1,53 & 705,4 & 104,7 & 2,161 & -299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -299,2 & 0 & 0 \\
 -1,53 & 104,7 & 114,5 & 0,895 & 0 & 0 & -6,11 & 6,11 & 0 & 0 & -1,53 & 0 \\
 3,06 & 2,161 & 0,89 & 20,02 & 0 & 0 & -6,11 & 4,074 & 0 & 0 & 0 & 3,06 \\
 \hline
 0 & -299,2 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6,11 & -6,11 & 0 & 0 & 306,888 & -3,06 & -1,53 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 6,11 & 4,074 & 0 & 0 & -3,06 & 14,259 & -3,06 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,53 & -3,06 & 1,53 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -299,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 299,2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1,53 & 3,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,53 & 0
 \end{bmatrix} \begin{pmatrix}
 \hat{x}_1^n \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 \theta_2 \\
 \hline
 x_3^{23} \\
 x_3^{34} \\
 y_3 \\
 \theta_3 \\
 \hline
 y_4 \\
 x_5 \\
 y_5
 \end{pmatrix} \quad (5.3.7)$$

APÉNDICE A

RESISTENCIA DE MATERIALES: PRONTUARIO BÁSICO

En este apéndice se resumen algunas de las situaciones de carga en vigas y barras que se encontrarán frecuentemente en problemas de cálculo matricial de estructuras. Debido a la existencia de diferentes criterios para establecer el signo de los esfuerzos, comenzamos dejando claro cuál es el criterio usado en este texto:

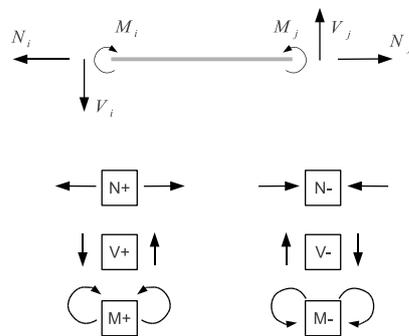


Figura A.1: Criterio de signos para esfuerzos axiales (N), cortantes (V) y momentos flectores (M).

Usando este criterio, el esfuerzo cortante $V(x)$ y el momento flector $M(x)$ a una distancia x de un extremo de la barra están relacionados mediante las siguientes leyes:

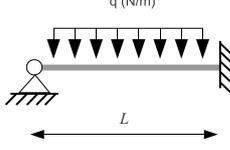
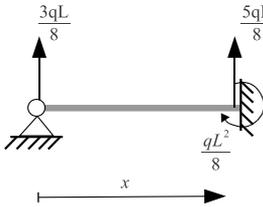
$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = q(x) \quad (\text{A.1})$$

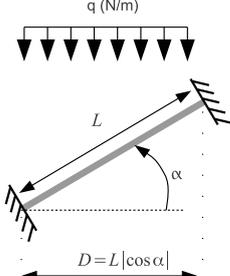
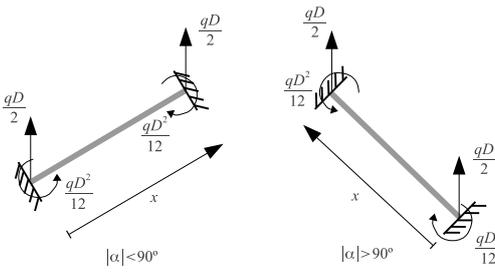
$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = -V(x) \quad (\text{A.2})$$

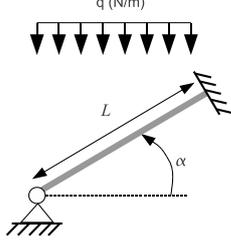
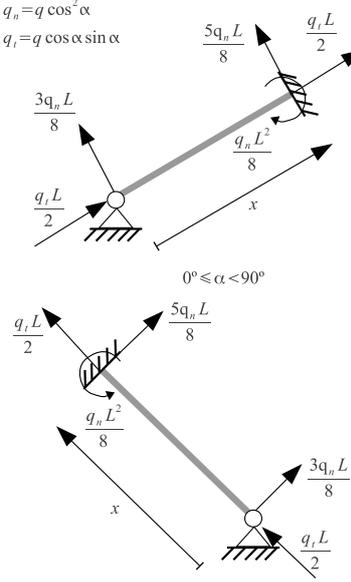
donde $q(x)$ representa la densidad de carga (N/m), positiva si la carga es hacia abajo (eje y global negativo). De estas leyes se sigue fácilmente, por ejemplo, que en ausencia de carga distribuida el cortante $V(x)$ es constante y el momento flector lineal con x . A continuación se estudian algunos casos de particular interés.

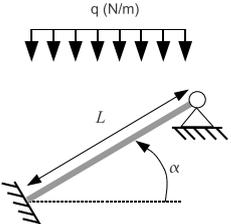
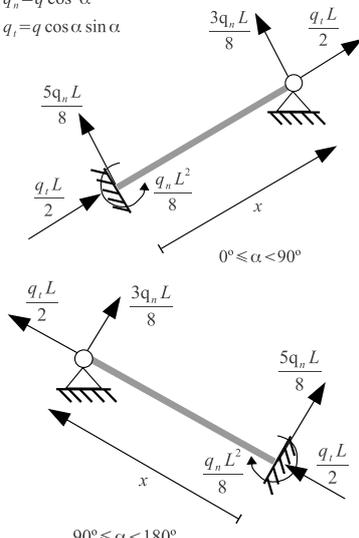
Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
<p style="text-align: center;">q (N/m)</p>	$N(x) = 0$ $V(x) = -\frac{qL}{2} + qx$ $M(x) = \frac{q}{2}\left(-\frac{L^2}{6} + Lx - x^2\right)$

Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
<p style="text-align: center;">q (N/m)</p>	$N(x) = 0$ $V(x) = -\frac{5qL}{8} + qx$ $M(x) = \frac{q}{8}\left(-L^2 + 5Lx - 4x^2\right)$

Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
 <p style="text-align: center;">$q \text{ (N/m)}$</p> <p style="text-align: center;">L</p>	 $N(x) = 0$ $V(x) = -\frac{3qL}{8} + qx$ $M(x) = \frac{q}{8}(3Lx - 4x^2)$

Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
 <p style="text-align: center;">$q \text{ (N/m)}$</p> <p style="text-align: center;">L</p> <p style="text-align: center;">$D = L \cos \alpha$</p> <p style="text-align: center;">$-180^\circ \leq \alpha < 180^\circ$</p>	 $N(x) = -\frac{qD}{2} \sin \alpha + xq \cos \alpha \sin \alpha$ $V(x) = -\frac{qD}{2} \cos \alpha + xq \cos^2 \alpha$ $M(x) = \frac{q \cos \alpha}{2} \left(-\frac{L^2}{6} + Lx - x^2 \right)$

Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
 <p style="text-align: center;">$q \text{ (N/m)}$</p> <p style="text-align: center;">L</p> <p style="text-align: center;">α</p> <p style="text-align: center;">$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$</p>	<p style="text-align: center;">$q_n = q \cos^2 \alpha$ $q_t = q \cos \alpha \sin \alpha$</p>  <p style="text-align: center;">$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$</p> <p style="text-align: center;">$90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$</p> $N(x) = -\frac{q_t L}{2} + x q_t$ $V(x) = -\frac{3q_n L}{8} + x q_n$ $M(x) = \frac{q_n}{8} (3Lx - 4x^2)$

Condición de carga	Reacciones y esfuerzos resultantes
 <p data-bbox="284 929 430 958">$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$</p>	<p data-bbox="606 353 726 409"> $q_n = q \cos^2 \alpha$ $q_t = q \cos \alpha \sin \alpha$ </p>  <p data-bbox="821 616 901 638">$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$</p> <p data-bbox="678 896 790 918">$90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$</p> $N(x) = -\frac{q_t L}{2} + x q_t$ $V(x) = -\frac{5 q_n L}{8} + x q_n$ $M(x) = \frac{q_n}{8} (-L^2 + 5 L x - 4 x^2)$

