

Estudio de las Redes PINN como modelos de sistemas dinámicos

Maiocchetti, E.^a, Irigoyen Gordo, E.^{b,*}, Larrea, M.^c, Tronci, S.^a

^a*Ingegneria chimica e dei processi biotecnologici, Università degli Studi di Cagliari, via Marengo 2, I-09123 Cagliari, Italy*

^b*University of the Basque Country (UPV/EHU), Intelligent Control Research Group, Department of System Engineering and Automatic Control, ETSI, 48013 Bilbao, Vizcaya, Spain*

^c*UPV/EHU, Escuela de Ingeniería de Gipuzkoa, Plaza Europa, 1, 20018, Donostia / San Sebastián, España.*

To cite this article: Maiocchetti E, Irigoyen Gordo E., Larrea M., Tronci S., 2025. Study of PINNs as dynamic system models. XX Simposio CEA de Control Inteligente, Huelva (Spain), 2025.

Resumen

Este artículo presenta la aplicación de redes neuronales informadas por la física (PINN) para resolver balances de energía y movimiento expresados con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones diferenciales parciales (EDP) mediante la integración de restricciones físicas directamente dentro de la función de pérdida. Se abordan dos casos prácticos: la ecuación del calor y la dinámica de un péndulo invertido montado en un carro circular. En ambos casos, se implementan redes neuronales Perceptrón Multicapa (MLP), variando las funciones de activación y el tamaño de la red. Los resultados obtenidos muestran que las MLP son capaces de aprender soluciones consistentes con la física y son adecuadas para resolver EDO o EDP. Para sistemas dinámicos más complejos, el uso de arquitecturas más profundas y activaciones adecuadas (como GeLU) resulta crucial. Por último, se destaca el potencial de las PINN en el ámbito del control predictivo y adaptativo, debido a su capacidad para combinar modelos basados en datos y conocimientos físicos.

Palabras clave: Modelización, Identificación y Tratamiento de Señales, Sistemas Adaptativos y de Aprendizaje, Redes Neuronales Informadas por la Física.

Study of PINNs as models of dynamic systems

Abstract

This article presents the application of physics-informed neural networks (PINNs) to solve energy and motion balances expressed with ordinary differential equations (ODEs) and partial differential equations (PDEs) by integrating physical constraints directly into the loss function. Two case studies are addressed: the heat equation and the dynamics of an inverted pendulum mounted on a circular cart. In both cases, multilayer perceptron (MLP) neural networks are implemented, varying the activation functions and the size of the network. The results obtained show that MLPs are able to learn physics-consistent solutions and are suitable for solving ODEs or PDEs. For more complex dynamical systems, the use of deeper architectures and suitable activations (such as GeLU) is crucial. Finally, the potential of PINNs in the field of predictive and adaptive control is highlighted, due to their ability to combine data-driven models and physical knowledge.

Keywords: Modelling, Identification and Signal Processing, Adaptive and Learning Systems, Physics Informed Neural Network

1. Introducción

En los últimos años, las redes neuronales informadas por la física (PINN) han despertado un interés creciente en la comunidad científica por su capacidad para resolver problemas complejos de física mediante el aprendizaje automático. A di-

ferencia de las redes neuronales tradicionales, las PINN incorporan ecuaciones que describen las leyes de la física, como las EDO o las EDP, en su función de pérdida, lo que permite a la red aprender soluciones que respeten estas restricciones, incluso en presencia de datos incompletos, ruidosos o ausentes. (Raissi et al., 2019)

*Autor para correspondencia: eloy.irigoyen@ehu.eus

Este trabajo pretende analizar la eficacia de las PINN a través de dos ejemplos concretos: la ecuación del calor, un problema clásico de difusión del calor descrito por una EDP, y la modelización de un péndulo invertido montado sobre un carro circular, cuya dinámica se rige por un sistema no lineal de EDO. En ambos casos, se utilizan redes Perceptrón Multicapa (MLP) con diferentes funciones de activación (tanh, GeLU) y la técnica de optimización ADAM, adaptando la arquitectura a las especificaciones del problema.

El objetivo de este trabajo es fundamentalmente demostrar la capacidad de las redes MLP para aprender soluciones coherentes con la física del sistema. Ello permitirá, posteriormente, explorar los límites y el potencial de este enfoque en contextos más complejos, en particular para aplicaciones en el campo del control predictivo y el control adaptativo de sistemas dinámicos. Si bien no es objeto de este estudio el adaptar los modelos PINN desarrollados a modelos utilizables en estrategias de control que requieran reproducir el comportamiento de sistemas dinámicos complejos, mediante la estimación de salidas futuras, se ha encontrado unos primeros trabajos donde se presentan estas adaptaciones. En el trabajo de Antonelo et al. (2024) se adaptan las redes PINN añadiendo entradas a la red que transmiten la condición inicial y la señal de control para un intervalo de tiempo determinado a lo largo del tiempo de simulación donde se aplica el control. Por otro lado, en Zarzycki and Lawryńczuk (2023) se presenta una nueva propuesta de modelo PINN hibridado con una red neuronal GRU (Gated Recurrent Unit) para utilizarla en una estrategia de control MPC. Además, proponen diferentes métodos de fusión de datos, como las técnicas de Lógica Difusa, para minimizar al máximo el error del modelo. Un enfoque más práctico se puede encontrar en Nicodemus et al. (2022), donde proponen un esquema de control MPC basado en modelos PINN adaptados, para solucionar un problema de seguimiento de trayectoria de un manipulador robótico.

En este artículo se presenta inicialmente los conceptos básicos de los modelos PINN, mostrando su estructura y la función objetivo (coste o pérdida) utilizada en el proceso de entrenamiento de dichas redes neuronales. A continuación, se presentan los dos casos de estudio empleados en este trabajo, los cuales permiten analizar la bondad de las PINN en la reproducción dinámica de los mismos. Posteriormente, se presenta el modo en el cual tiene que ser implementada cada PINN para ambos casos de estudio. Seguidamente se hace un análisis de resultados y se presentan los primeros valores del estudio. Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

2. PINN

Las redes neuronales informadas por la física (PINN, Physics-Informed Neural Networks) son redes neuronales que integran restricciones físicas, normalmente expresadas mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales (ODE/PDE), directamente en la función de pérdida (Raissi et al., 2019). La optimización de esta función obliga a la red a generar soluciones compatibles tanto con los datos disponibles como con las leyes físicas.

Una PINN consiste en una red neuronal (normalmente una red MLP) y explota la diferenciación automática para calcular

las derivadas de las salidas con respecto a las entradas. Estas derivadas se sustituyen en las ecuaciones físicas y los residuos resultantes se minimizan durante el entrenamiento. La red neuronal se entrena utilizando una función de pérdida compuesta por diferentes términos, sin incorporar coeficientes multiplicativos que ponderen individualmente cada uno de ellos. De este modo, todos los componentes contribuyen de manera equitativa al proceso de aprendizaje. Cabe señalar que no es necesario que la función de pérdida incluya la totalidad de los términos descritos en la Ecuación (1). Estos términos son: \mathcal{L}_{EDO} , para imponer el cumplimiento del vínculo físico representado por la ecuación diferencial ordinaria en el dominio; \mathcal{L}_{DATA} , el cual evalúa el error entre las predicciones del modelo y los datos observados; \mathcal{L}_{BC} , término que representa la penalización por incumplimiento de las condiciones de frontera; y \mathcal{L}_{IC} , término que representa la penalización por incumplimiento de las condiciones iniciales.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EDO} + \mathcal{L}_{DATA} + \mathcal{L}_{BC} + \mathcal{L}_{IC} \quad (1)$$

Este enfoque permite a las PINN aprender soluciones físicamente coherentes incluso en presencia de datos dispersos o ruidosos, lo que las hace especialmente eficaces para problemas inversos, simulaciones físicas y modelización de sistemas complejos (Raissi et al., 2019).

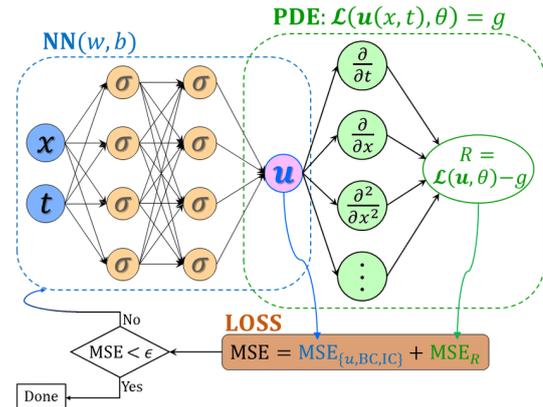


Figura 1: Esquema PINN. (Meng et al., 2020)

3. Formulación del problema

A continuación se presenta el modo en el cual se han utilizado las PINN para resolver la ecuación clásica del calor y modelar la dinámica de un péndulo invertido.

3.1. Ecuación del calor

La ecuación clásica del calor obedece a la expresión presentada en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$T(x, 0) = \exp(-\alpha \cdot x^2), \quad \alpha = 5^2, \quad (3)$$

junto a las siguientes condiciones de contorno (condiciones de Dirichlet):

$$T(-1, t) = T(1, t) = 0$$

El objetivo de utilizar el procedimiento de las redes PINN es encontrar valores de $T(x, t)$ que satisfagan la ecuación diferencial y las condiciones asignadas.

3.2. Péndulo invertido

La física del péndulo invertido sobre un carro circular se describe mediante dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, una para calcular el ángulo del péndulo ϕ y otra para el ángulo del carro γ . Sus respectivas ecuaciones son las siguientes (Le et al., 2020):

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2 \phi + J_r \right) \ddot{\gamma} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \phi \ddot{\phi} + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin \phi \dot{\phi}^2 = \tau - B_r \dot{\gamma} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \phi \ddot{\gamma} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\phi} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos \phi \sin \phi \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin \phi = -B_p \dot{\phi} \quad (5)$$

Las condiciones iniciales de las que se parte para el análisis dinámico de este sistema son:

$$\phi_0 = \pi/6 \quad \dot{\phi}_0 = 0 \quad \gamma_0 = 0 \quad \dot{\gamma}_0 = 0$$

De nuevo, se desea estudiar el comportamiento que tienen las redes PINN al modelar el comportamiento dinámico de este sistema.

4. Implementación de la red PINN

A continuación se presenta el desarrollo que se ha realizado, para cada uno de los casos a estudiar, a la hora de modelizar sus comportamientos.

4.1. Ecuación del calor

Se implementa una red neuronal totalmente conectada (MLP) con 8 capas ocultas de 14 neuronas, función de activación \tanh y optimización ADAM para el proceso de entrenamiento y ajuste de sus parámetros. Las entradas son x y t , por lo que se crea una matriz de entrada con 2 columnas, y la salida es T .

En este estudio se hace necesario crear una malla (*meshgrid*), ya que la restricción física dada a la PINN es una Ecuación Diferencial Parcial en función del tiempo y el espacio.

A continuación se presenta la secuencia de códigos desarrollados en el programa MATLAB:

Listing 1: Generación de datos para el caso de la ecuación de calor

```
x_entr = [-1:0.02:1];
t_entr = (x_entr + 1) ./ 2;
[xgrid, tgrid] = meshgrid(x_entr, t_entr);
inputData_entr = [xgrid(:)'; tgrid(:)'];
```

Las condiciones iniciales se han caracterizado por medio de 40 puntos y las condiciones de contorno por medio de 30 puntos, para el rango comprendido entre $x = 1$ y $x = -1$ con intervalos de 0,02, respectivamente.

Para este estudio, la función de pérdida (coste) a optimizar consiste en:

- \mathcal{L}_{EDP} : calcula el MSE del residuo de la PDE (2).
- \mathcal{L}_{IC} : calcula el MSE de la condición inicial.
- \mathcal{L}_{BC} : calcula el MSE de las condiciones de contorno.
- \mathcal{L}_{DATA} : calcula el MSE entre la salida de la red y la solución numérica de la ecuación de calor.

4.2. Péndulo invertido

En el caso del péndulo invertido, se implementa una red neuronal totalmente conectada (MLP) con 12 capas ocultas de 105 neuronas, activación GELU, optimización ADAM. La entrada es t , y la salida son los ángulos γ y ϕ . En este caso, dicha generación de datos se logra a través de la expresión en MATLAB:

Listing 2: Generación de datos para el péndulo invertido

```
t = linspace(0, 10, 5000);
```

Posteriormente, se llevó a cabo la incorporación de la entrada de una tensión V_m . lo que hizo más complicado el estudio de los dos ángulos. Para este caso, la secuencia de código MATLAB es:

Listing 3: Nueva generación de datos para el péndulo invertido

```
function Vm = Vm_fun(t)
Vm = 5 * sin(2 * pi * 0.2 * t);
End
```

En este caso, las condiciones iniciales se caracterizaron por 400 puntos. Además, la función de pérdida consiste en:

- \mathcal{L}_{EDO} : calcula el MSE del residuo de los ODEs (4) y (5).
- \mathcal{L}_{IC} : calcula el MSE de la condición inicial.
- \mathcal{L}_{DATA} : calcula el MSE entre la salida de la red y la solución numérica de la ecuación del calor.

5. Resultados y discusión

El objetivo de este trabajo es obtener un resultado de PINN lo más cercano posible a las soluciones numéricas de las ecuaciones (2), (4) y (5). Para ello se van a mostrar a continuación los resultados de los análisis realizados sobre ambos sistemas modelizados.

5.1. Ecuación del calor

Tras realizar el entrenamiento de la red PINN, los resultados obtenidos mostraron una satisfactoria reproducción del comportamiento de la propagación del calor, tal y como se puede observar en la Figura 2, siendo la gráfica de la izquierda el Modelo PINN, mientras que la gráfica de la derecha es la solución numérica.

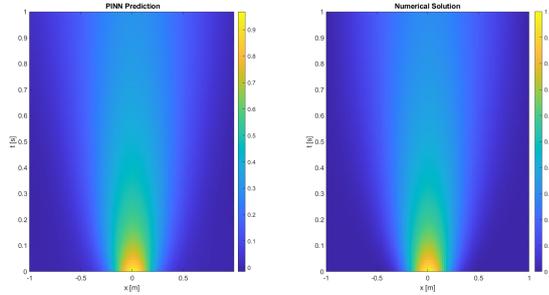


Figura 2: Validación de la ecuación de calor.

En la Figura 2, las diferencias entre la solución obtenida mediante el modelo PINN y la solución numérica son apenas perceptibles visualmente, lo que dificulta una evaluación cualitativa precisa del error. Por este motivo, los valores del MSE se presentan en la Figura 3, donde pueden apreciarse de manera más clara y cuantitativa. En dicha figura se representan 5 gráficas tomadas en diferentes instantes, separados en intervalos de 0.25 segundos, considerando que el rango de tiempo está normalizado al rango [0, 1]. En cada una de ellas se puede observar el error que existe entre la solución numérica y la predicción de la red PINN. El mayor error se localiza en el $t = 0$, donde existen mayores diferencias de temperatura a lo ancho del espacio de trabajo, siendo en este caso un MSE de $1,0142 \times 10^{-2}$.

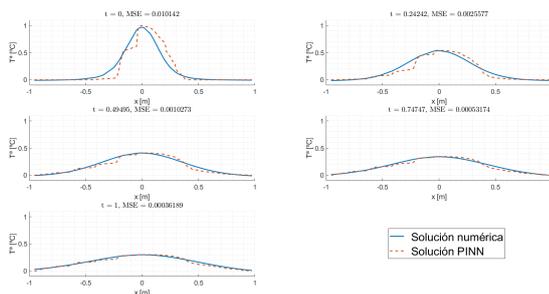


Figura 3: MSE de la ecuación de calor.

5.2. Péndulo invertido

En la primera fase de entrenamientos, se utilizó la función de activación tanh, pero el modelo mostró un comportamiento cíclico de *vanishing dynamic gradient*, en el que el gradiente crea una meseta de valores muy pequeños (orden 10^{-4} y 10^{-5}) antes de volver a subir, por lo que, como puede verse en la Figura 4, el modelo no es satisfactorio.

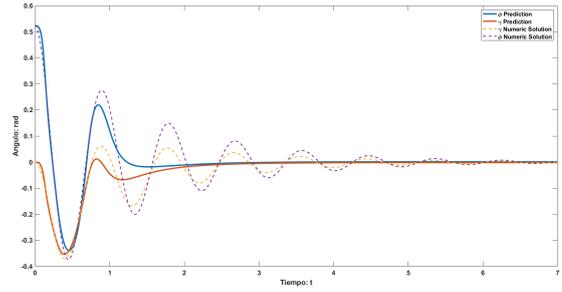


Figura 4: Péndulo invertido con activación tanh

Dado que la función ReLU resultó ser la función de activación más adecuada para evitar el gradiente evanescente, aunque este tipo de función no permite el cálculo de segundas derivadas, se eligió la activación GeLU (Gaussian Error Linear Unit), que mantiene propiedades similares a ReLU pero con suficiente convexidad para soportar la diferenciación automática de segundo orden. GeLU se comporta de forma similar a Swish, pero se basa en una función que incluye tanh, lo que resulta útil para las derivaciones analíticas. En la Figura 5 se puede observar cómo de satisfactorio ha resultado ser la reproducción del comportamiento del péndulo invertido a través de un modelo de red PINN. Los resultados mostrados en la Figura 5 reportaron un MSE de $3,401 \times 10^{-5}$ para ϕ y de $1,385 \times 10^{-5}$ para γ .

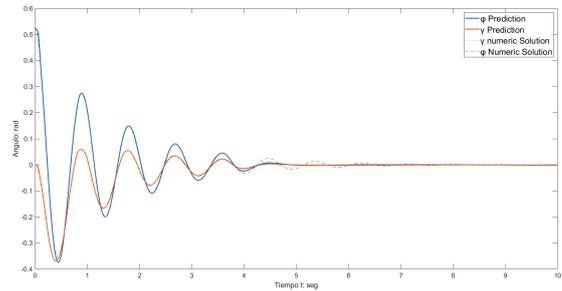


Figura 5: Péndulo invertido con activación GELU

Con objeto de estudiar la robustez del modelo, se estudió su comportamiento con diferentes condiciones iniciales. Se puede observar en la Figura 6 que la red PINN sigue ofreciendo resultados satisfactorios, incluso con condiciones iniciales alternativas. Los resultados mostrados en la Figura 6 reportaron un MSE de $5,283 \times 10^{-4}$ para ϕ y de $3,862 \times 10^{-5}$ para γ .

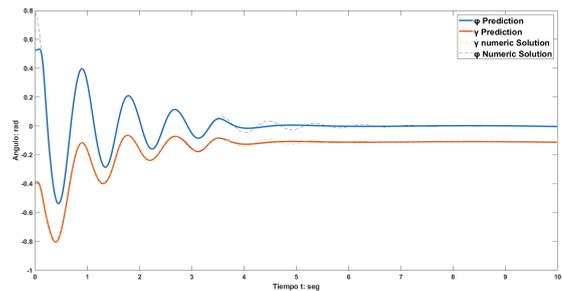


Figura 6: Péndulo invertido con condiciones iniciales diferentes

Posteriormente, se estudió la influencia en el modelo de añadir una entrada de tensión sinusoidal. Tal y como se puede observar en la Figura 7, la red PINN sigue mostrando resultados satisfactorios incluso con la presencia de una entrada de tensión. Los resultados mostrados en la Figura 7 reportaron un MSE de $7,3 \times 10^{-3}$ para ϕ y de 2×10^{-3} para γ .

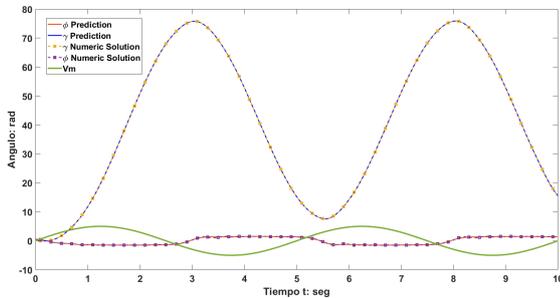


Figura 7: Validación con una tensión de entrada sinusoidal

6. Conclusiones

Las redes neuronales informadas por la física (PINN) resultan eficaces para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Para sistemas sencillos, las PINN pueden aprender la solución utilizando únicamente las restricciones físicas incluidas en la función de pérdida, incluso en ausencia de datos experimentales o simulados. Para sistemas dinámicos más complejos, como el péndulo invertido, se requieren arquitecturas neuronales más profundas y amplias, con el consiguiente aumento del coste computacional. En estos casos, un perceptrón multicapa (MLP) tradicional, entrenado directamente con los datos, puede ser más eficiente en términos de rendimiento computacional, aunque renuncia a la información física explícita.

Sin embargo, las redes PINN representan una herramienta especialmente prometedora en el contexto de los sistemas de control, ya que se encuentran en una posición intermedia entre los modelos puramente basados en datos y los puramente físicos, lo que los hace adecuados tanto como modelo predictivo dentro de los controladores MPC (Antonelo et al., 2024),

especialmente en presencia de dinámicas complejas o parcialmente conocidas, como en el contexto del control inteligente, actuando como modelos adaptativos dentro de arquitecturas neuronales o híbridas, capaces de actualizarse dinámicamente y hacer frente a incertidumbres estructurales o variaciones en los parámetros del sistema.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado parcialmente gracias a la ayuda de la Red Temática con código RED2022-134588-T, la cual ha sido financiada por el MICIU con referencia AEI/10.13039/501100011033. Este trabajo ha sido realizado en colaboración entre el grupo de investigación GICI de la UPV/EHU y el Departamento di Ingegneria chimica e dei processi biotecnologici de la Università degli Studi di Cagliari.

Referencias

- Antonelo, E. A., Camponogara, E., Seman, L. O., Jordanou, J. P., de Souza, E. R., Hübner, J. F., 2024. Physics-informed neural nets for control of dynamical systems. *Neurocomputing* 579, 127419.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2024.127419>
- Le, H. N., Dang, P. V., Pham, A.-D., Vo, N. T., 2020. System identifications of a 2dof pendulum controlled by qube-servo and its unwanted oscillation factors. *Archive of Mechanical Engineering* vol. 67 (No 4), 435–450.
DOI: 10.24425/ame.2020.131699
- Meng, X., Li, Z., Zhang, D., Karniadakis, G. E., 2020. Ppinn: Parareal physics-informed neural network for time-dependent pdes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 370, 113250.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113250>
- Nicodemus, J., Kneifl, J., Fehr, J., Unger, B., 2022. Physics-informed neural networks-based model predictive control for multi-link manipulators. *IFAC-PapersOnLine* 55 (20), 331–336, 10th Vienna International Conference on Mathematical Modelling MATHMOD 2022.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.117>
- Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G., 2019. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 378, 686–707.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Zarzycki, K., Lawryńczuk, M., 2023. Physics-informed hybrid gru neural networks for mpc prediction. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2), 8726–8731, 22nd IFAC World Congress.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.055>