

Teoría de Mecanismos:  
Apuntes y problemas resueltos

José Luis Blanco Claraco  
José Luis Torres Moreno  
Antonio Giménez Fernández



Departamento de Ingeniería  
Área de Ingeniería Mecánica  
Universidad de Almería

Versión preliminar  
(fecha: 15 de noviembre de 2015)

### Historial de cambios y revisiones:

- 3/NOV/2015: Añadido problema resuelto §6.3.
- 9/OCT/2015: Añadida sección §2.3.1.
- 29/NOV/2014: Corregida errata en solución del problema §4.3; añadido denominador omitido por error en Ec. (4.79).
- 28/OCT/2014: Corrección de figuras y resultados del problema §3.1.



Este obra está bajo una licencia de Creative Commons  
Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.

<b>I Cinemática: métodos analíticos</b>	<b>4</b>
<b>1. Repaso de conceptos básicos</b>	<b>5</b>
1.1. Sistemas de coordenadas . . . . .	5
1.2. Vectores . . . . .	5
1.3. Operaciones vectoriales básicas . . . . .	7
1.3.1. Suma . . . . .	7
1.3.2. Resta . . . . .	7
1.3.3. Escalado . . . . .	8
1.3.4. Producto escalar . . . . .	8
1.3.5. Producto vectorial . . . . .	9
1.3.6. Triple producto vectorial . . . . .	10
1.4. Derivadas de expresiones vectoriales . . . . .	12
1.5. Problemas resueltos y propuestos . . . . .	13
<b>2. Nociones de cinemática analítica</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Coordenadas intrínsecas . . . . .	16
2.3. Cinemática del sólido rígido . . . . .	19
2.3.1. Concepto de velocidad angular . . . . .	19
2.3.2. Derivada de un vector constante que se traslada o rota . . . . .	19
2.3.3. Caso de un punto en un sólido rígido . . . . .	22
2.3.4. Caso de un punto móvil en un sistema de referencia móvil . . . . .	22
<b>3. Problemas resueltos</b>	<b>25</b>
3.1. Examen Feb-2010 . . . . .	26
3.2. Examen Feb-2013 . . . . .	31
3.3. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1]) . . . . .	35
3.4. Examen Feb-2014 . . . . .	37
<b>II Cinemática: métodos numéricos</b>	<b>39</b>
<b>4. Problemas resueltos</b>	<b>40</b>
4.1. Bloques en dos correderas . . . . .	41
4.2. Ejemplo modelado . . . . .	46

4.3. Cuadrilátero con motor en acoplador . . . . .	48
4.4. Modelado: retorno rápido . . . . .	51
4.5. Mecanismo de cuatro barras: posición inicial . . . . .	54
4.6. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1]) . . . . .	56
4.7. Problema cilindro neumático . . . . .	59
4.8. Examen Feb-2014 . . . . .	61
<b>III Dinámica numérica</b>	<b>64</b>
<b>5. Problemas resueltos</b>	<b>65</b>
5.1. Examen Feb-2014 . . . . .	65
<b>IV Engranajes</b>	<b>69</b>
<b>6. Problemas resueltos</b>	<b>70</b>
6.1. Examen Feb-2014 . . . . .	70
6.2. Examen Sep-2014 . . . . .	71
6.3. Cálculo de velocidades en un tren compuesto . . . . .	75

## Parte I

# Cinemática: métodos analíticos

# CAPÍTULO 1

## REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS

### Contents

<b>1.1. Sistemas de coordenadas</b>	<b>5</b>
<b>1.2. Vectores</b>	<b>5</b>
<b>1.3. Operaciones vectoriales básicas</b>	<b>7</b>
1.3.1. Suma	7
1.3.2. Resta	7
1.3.3. Escalado	8
1.3.4. Producto escalar	8
1.3.5. Producto vectorial	9
1.3.6. Triple producto vectorial	10
<b>1.4. Derivadas de expresiones vectoriales</b>	<b>12</b>
<b>1.5. Problemas resueltos y propuestos</b>	<b>13</b>

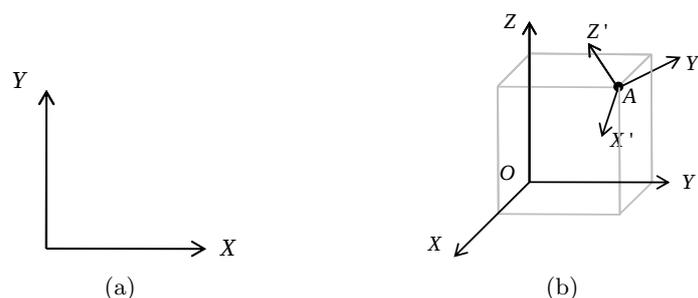
## 1.1. Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas consiste en un punto al que llamamos *origen de coordenadas* y en un conjunto de *direcciones perpendiculares* entre sí que usaremos para medir la posición de cualquier punto o vector con respecto al origen. Normalmente emplearemos sistemas tridimensionales, por ser los más útiles en problemas reales de ingeniería y mecánica, aunque a menudo podremos simplificar un problema abordándolo mediante coordenadas bidimensionales, siempre que todos los desplazamientos ocurran en un único plano.

En estos apuntes denotaremos un sistema de coordenadas por el nombre de sus ejes ( $XYZ$ ) o por el nombre del punto donde está su origen ( $O$ ), como se ve en la Figura 1.1.

## 1.2. Vectores

Una magnitud vectorial es una entidad compuesta por un *módulo* (tamaño) y una *dirección* en el espacio. Es fundamental por tanto no confundir magnitudes físicas *vectoriales* (posición, velocidad, fuerzas, par de fuerzas, velocidad angular, etc.) con otras que son *escalares* (energía cinética, módulo de la velocidad, módulo de una fuerza, etc.).



**Figura 1.1:** Ejemplos de sistemas de coordenadas. (a) Un sistema  $XY$  en el plano. (b) Un sistema tridimensional  $XYZ$  con origen en  $O$  y otro sistema  $X'Y'Z'$  con origen en  $A$ .

Un vector puede venir dado en dos formas: (i) por su módulo y su dirección por separado, o (ii) directamente por sus coordenadas en el espacio. En cuanto a notación, un vector se suele denotar en textos impresos por una letra minúscula en negrita ( $\vec{\mathbf{r}}$ ), mientras que al escribir a mano se usa el símbolo de vector ( $\vec{r}$ ). A la hora de operar vectores junto a matrices es importante tener claro si estos son vectores fila o vectores columna. El convenio habitual es tratar los vectores como columnas, y así lo haremos en este texto:

$$\vec{\mathbf{r}} = (r_x \ r_y \ r_z)^\top = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = (r_x, r_y, r_z) \quad (1.1)$$

donde la tercera forma mostrada,  $(r_x, r_y, r_z)$ , será la más empleada por motivos de espacio.

El **módulo de un vector** se denota con  $|\mathbf{a}|$  o con  $|\tilde{\mathbf{a}}|$ . En algunos libros también se denota con el símbolo de vector sobre una letra minúscula en texto regular (no negrita), p.ej.  $\vec{a}$ . No usaremos aquí dicho convenio y, desde luego, no se aconseja seguirlo en ejercicios escritos a mano ya que no se habría forma de distinguir una magnitud vectorial y su módulo. El módulo de un vector dadas sus coordenadas  $\vec{\mathbf{r}} = (r_x, r_y, r_z)$  es inmediato, ya que:



$$|\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (1.2)$$

Un **vector unitario** es aquel cuyo módulo es la unidad. Debido a la frecuencia con que se usan los vectores asociados a las tres direcciones de un sistema de coordenadas  $XYZ$ , se suelen denotar como  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  a los vectores unitarios asociados con las direcciones positivas de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente. Dado un vector cualquiera  $\vec{\mathbf{r}}$  podemos hallar un vector unitario en su misma dirección ( $\hat{\vec{\mathbf{r}}}$ ) simplemente dividiendo sus coordenadas por su módulo:



$$\hat{\vec{\mathbf{r}}} = \left( \frac{r_x}{|\vec{\mathbf{r}}|}, \frac{r_y}{|\vec{\mathbf{r}}|}, \frac{r_z}{|\vec{\mathbf{r}}|} \right) \quad (1.3)$$

## 1.3. Operaciones vectoriales básicas

### 1.3.1. Suma

Analíticamente, la suma de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  da por resultado otro vector  $\vec{\mathbf{r}}$  cuyas coordenadas son la suma de los dos primeros:



$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Gráficamente, la suma de vectores equivale a la composición de vectores, colocando uno en el extremo del otro. El vector resultante queda determinado por el punto de inicio y el extremo del último vector que se suma:

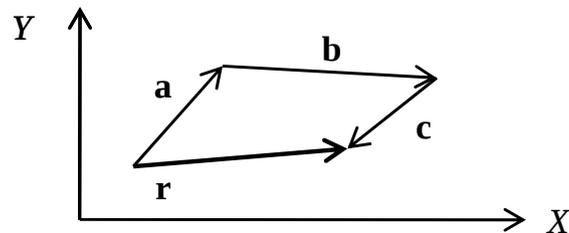


Figura 1.2: Ejemplo de suma vectorial  $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  por el método gráfico.

La suma cumple la propiedad conmutativa, por lo que no importa el orden en que se sumen dos o más vectores (es decir,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ).

### 1.3.2. Resta

La resta de vectores se puede ver como un caso particular de suma donde uno de los vectores se invierte, es decir:



$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b})\end{aligned}\quad (1.5)$$

donde el vector inverso  $-\mathbf{b}$  se obtiene cambiando el signo a todas sus coordenadas o, gráficamente, invirtiendo su sentido mientras se mantienen su módulo y dirección:

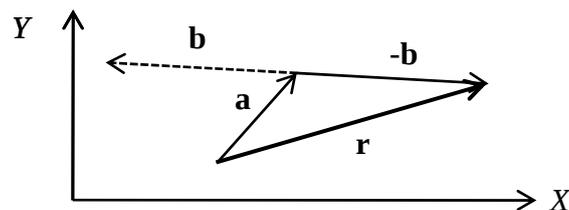


Figura 1.3: Ejemplo de resta  $\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  por el método gráfico.

### 1.3.3. Escalado

Un vector se puede multiplicar o dividir por un número escalar, con lo que solamente se verá afectado su módulo pero no su dirección. Analíticamente, el producto de un vector  $\vec{r}$  por un escalar  $a$  se obtiene multiplicando cada una de las componentes del vector por el escalar:

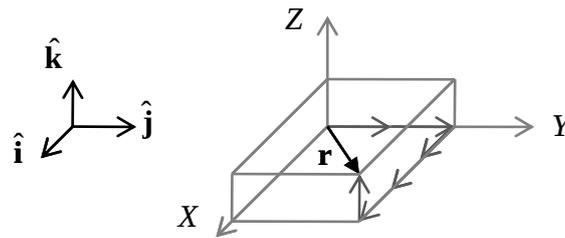


$$\begin{aligned} a\vec{r} &= a(r_x, r_y, r_z) \\ &= (ar_x, ar_y, ar_z) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Esta operación es precisamente la que implícitamente realizamos cuando damos un vector por sus coordenadas  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ , ya que esos tres números son los que multiplicarán a los tres ejes unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente, siendo el vector  $\vec{r}$  la resultante de sumar esos tres vectores escalados. Como ejemplo, tomemos el vector:

$$\vec{r} = (3, 2, 1) \quad \longrightarrow \quad \vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k} \quad (1.7)$$

que gráficamente podemos construir mediante la composición de  $3\hat{i}$ , más  $2\hat{j}$ , y más  $1\hat{k}$ , como se muestra en la Figura 1.4.



**Figura 1.4:** Ejemplo de composición de varios vectores (las bases unitarias en este caso), cada uno escalado por un número distinto para dar un vector  $\vec{r}$ .

### 1.3.4. Producto escalar

Definimos el producto escalar de dos vectores tridimensionales  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  como la magnitud escalar resultante de:



$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (1.8)$$

Alternativamente, el producto escalar se puede expresar en otra forma que tiene una clara interpretación geométrica:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1||\vec{r}_2| \cos \theta \quad (1.9)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que los vectores hacen en el espacio, medido sobre el plano que contiene a ambos. (*Ver ejemplo 1.1*).

Por tanto, dado un vector genérico  $\vec{r}$  y un vector unitario  $\hat{u}$ , su producto escalar:

$$\vec{r} \cdot \hat{u} = |\vec{r}||\hat{u}| \cos \theta = |\vec{r}| \cos \theta \quad (1.10)$$

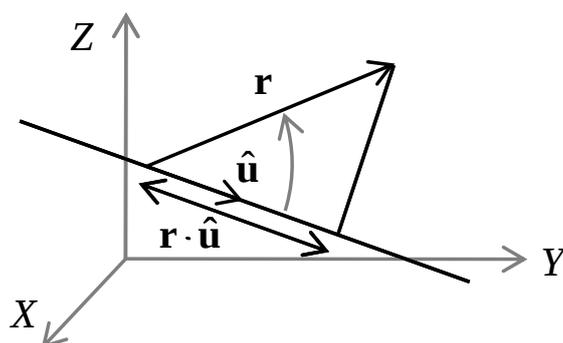


Figura 1.5: La proyección del vector  $\vec{r}$  sobre la dirección de  $\hat{u}$ .

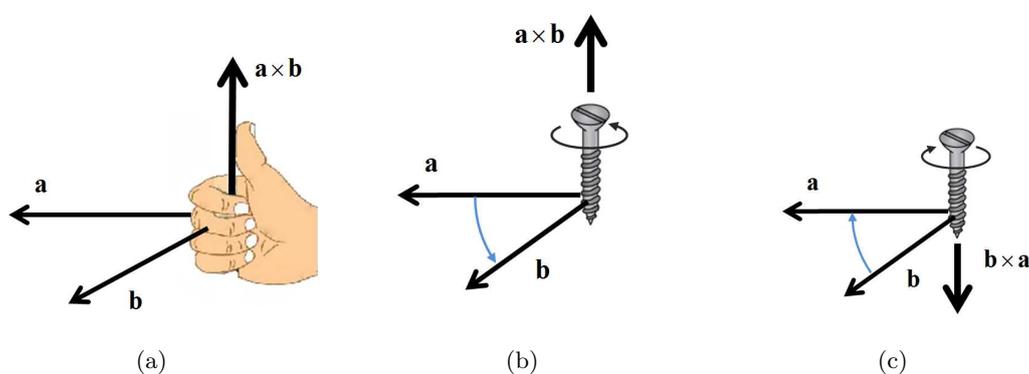


Figura 1.6: Trucos para recordar el sentido de un producto vectorial. (a) La regla de la mano derecha dice que si cerramos los dedos haciéndolos girar pasando primero en la dirección de  $a$  y luego en la de  $b$ , el pulgar apuntará en la dirección de  $a \times b$ . (b)–(c) La regla del destornillador indica que el giro de un tornillo en el sentido definido por el ángulo más corto desde  $a$  hacia  $b$ , lo hará subir o bajar en el mismo sentido del producto vectorial correspondiente.

nos dará la **proyección** de  $\vec{r}$  sobre  $\hat{u}$ , como se ve en la Figura 1.5. En otras palabras, “cuánto de  $\hat{u}$ ” contiene  $\vec{r}$ .

### 1.3.5. Producto vectorial

A diferencia del producto escalar, el resultado de un producto vectorial no es un número sino, como su nombre indica, un nuevo vector. Denotaremos esta operación como  $\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ , aunque en otros textos se emplea la notación alternativa  $\vec{r} = \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$ .

Las propiedades más importantes del producto vectorial son:

- El **módulo** de  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  vale  $|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\sin\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que hacen  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Esto implica que si dos vectores son colineales (hacen  $0^\circ$  o  $180^\circ$ ), su producto vectorial será nulo.
- La dirección de  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  sería **siempre perpendicular a ambos**,  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Es decir, será perpendicular al plano que ambos vectores definen.
- El sentido viene dado por las reglas de la mano derecha o, equivalentemente, la del tornillo, ilustradas en la Figura 1.6.

- En un producto vectorial **el orden sí que importa**, ya que  $\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2 = -\vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{r}}_1$ . Es decir, al intercambiar el orden de los vectores se obtiene un vector de idéntico módulo y dirección pero de sentido contrario.

En general, si conocemos las coordenadas de dos vectores  $\vec{\mathbf{r}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{\mathbf{r}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , podemos calcular su producto vectorial usando la fórmula del determinante de una matriz de  $3 \times 3$ :



$$\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Alternativamente, podemos usar el operador  $[\cdot]_{\times}$  sobre el primer término del producto ( $\vec{\mathbf{r}}_1$ ) para convertir ese vector en una matriz  $3 \times 3$ , que entonces se multiplica (usando el producto matricial estándar) con el segundo término ( $\vec{\mathbf{r}}_2$ ), resultando en un vector columna  $3 \times 1$  con las coordenadas del vector resultante:



$$\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{r}}_2 \equiv [\vec{\mathbf{r}}_1]_{\times} \vec{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Es útil coger soltura con multiplicaciones vectoriales donde intervengan los vectores unitarios de un sistema de coordenadas ( $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$ ), debido a lo frecuentemente que encontraremos esta operación durante la resolución de problemas. Debido a que siempre usaremos un sistema dextrógiro de coordenadas, tendremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} &= -\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} &= -\hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} &= -\hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

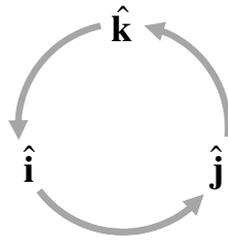
Se puede emplear la siguiente regla nemotécnica: tomando los vectores unitarios en secuencia,  $\hat{\mathbf{i}} \rightarrow \hat{\mathbf{j}} \rightarrow \hat{\mathbf{k}} \rightarrow \hat{\mathbf{i}} \rightarrow \hat{\mathbf{j}} \dots$  (ver Figura 1.7), el producto de dos términos consecutivos en ese mismo orden nos dará siempre el siguiente elemento, con signo positivo. En caso de encontrarlos en el orden inverso, tendremos que añadir el signo negativo. Es conveniente dedicar unos momentos a comparar la Figura 1.7 con la Ec. (1.13) para interiorizar esta regla.

### 1.3.6. Triple producto vectorial

Es frecuente en mecánica encontrar productos vectoriales triples, simplemente consistentes en la concatenación de dos productos vectoriales:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1.14)$$

El paréntesis es muy importante ya que indica el **orden** de los dos productos vectoriales: primero, multiplicar  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , y después, multiplicar  $\mathbf{a}$  por el resultado. Recordar que el producto vectorial no es conmutativo, por lo que en general:



**Figura 1.7:** Regla nemotécnica para recordar el orden en que el producto de dos vectores unitarios nos da el siguiente dentro de una base  $XYZ$ .

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (1.15)$$

Debido a lo frecuentemente que aparecerán este tipo de productos triples en mecánica analítica, conviene agilizar su cálculo explotando las siguientes propiedades:

1. Si el primer y segundo vector que aparecen en el producto son el mismo, a su vez éste es perpendicular al tercero, y todos son unitarios (módulo unidad), el resultado total será siempre igual el tercer vector con su sentido invertido. Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} \times (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) &= -\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{i}} \times (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) &= -\hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) &= -\hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}})) &= \hat{\mathbf{i}} \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Este resultado, extendido como se explica abajo, será muy útil cuando se calculen aceleraciones centrípetas.

2. Si tenemos tres vectores genéricos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ , con direcciones dadas por los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  y  $\hat{\mathbf{c}}$  y de módulos  $a, b$  y  $c$ , respectivamente, se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a\hat{\mathbf{a}}) \times ((b\hat{\mathbf{b}}) \times (c\hat{\mathbf{c}})) \\ &= abc (\hat{\mathbf{a}} \times (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{c}})) \end{aligned} \quad (1.17)$$

lo que significa que siempre podremos reducir un producto vectorial triple al producto de tres vectores unitarios por un lado, y un escalado del resultado (la multiplicación por un número real).

3. Encadenando las dos propiedades anteriores, llegamos a la siguiente regla:



$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a\hat{\mathbf{a}}) \times ((a\hat{\mathbf{a}}) \times (b\hat{\mathbf{b}})) = \begin{cases} a^2b(-\hat{\mathbf{b}}) \\ \text{(o equivalentemente)} \\ a^2(-\mathbf{b}) \end{cases} \quad (1.18)$$

Un ejemplo concreto con valores numéricos sería:

$$5\hat{\mathbf{k}} \times (5\hat{\mathbf{k}} \times 4\hat{\mathbf{i}}) = \begin{Bmatrix} 5^2 4(-\hat{\mathbf{i}}) \\ 5^2(-4\hat{\mathbf{i}}) \end{Bmatrix} = -100\hat{\mathbf{i}} \quad (1.19)$$

## 1.4. Derivadas de expresiones vectoriales

En mecánica analítica se trata constantemente con vectores que representan las coordenadas de algún punto de interés, luego es natural que al interesarnos por velocidades y aceleraciones aparezcan derivadas de expresiones vectoriales.

La derivada de un vector con respecto al tiempo es simplemente otro vector cuyas componentes son las derivadas de las coordenadas del primer vector. Sin embargo, en la práctica conviene familiarizarse con las siguientes reglas básicas para agilizar los cálculos.

- **Linealidad:** La derivada de la suma de dos vectores es la suma de sus derivadas:



$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\mathbf{b} \equiv \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \quad (1.20)$$

Además, los valores constantes pueden salir fuera de la derivada:



$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{a}) = k\dot{\mathbf{a}} \quad (\text{Sólo si } k \text{ es una constante}) \quad (1.21)$$

- **Regla del producto:** Recordemos la regla de la derivada del producto de funciones:  $\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g}$ . Esta misma norma se aplica a productos de una función escalar multiplicada por un vector:



$$\frac{d}{dt}(k(t)\mathbf{a}) = \frac{dk(t)}{dt}\mathbf{a} + k(t)\dot{\mathbf{a}} \quad (1.22)$$

y también al producto escalar y vectorial de dos vectores:



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

## 1.5. Problemas resueltos y propuestos

 **Ejemplo 1.1** Determinar el ángulo que hacen los vectores  $\vec{r}_1 = (2, -3, 5)$  y  $\vec{r}_2 = (-1, 1, 2)$ . ■

Como tenemos las coordenadas de ambos vectores, podemos usar la Ec. (1.8) para calcular su producto escalar:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 5$$

Por otro lado, usando la Ec. (1.2) obtenemos los módulos de ambos vectores,  $|\vec{r}_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$  y  $|\vec{r}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ , con lo que sustituyendo todos los datos conocidos en la Ec. (1.9) y despejando el ángulo desconocido  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 &= |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta \\ 5 &= \sqrt{38} \sqrt{6} \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{5}{\sqrt{6 \cdot 38}} \\ \theta &= \cos^{-1}(0.331) = 70.66^\circ\end{aligned}$$

 **Ejemplo 1.2** Evaluar el triple producto vectorial  $10\hat{i} \times (10\hat{i} \times 3\hat{k})$ . ■

*Método 1:* Podemos aplicar la fórmula del determinante de la Ec. (1.11) dos veces, una para cada uno de los dos productos. Primero para el producto dentro del paréntesis:

$$10\hat{i} \times 3\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\hat{j}$$

y a continuación el producto vectorial exterior al paréntesis:

$$10\hat{i} \times (\underbrace{-30\hat{j}}_{=10\hat{i} \times 3\hat{k}}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -30 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} = -300\hat{k}$$

*Método 2:* Usando la regla nemotécnica de la Figura 1.7, sabemos que la dirección de  $\hat{i} \times \hat{k}$  será la de  $-\hat{j}$ , por lo que debido a la linealidad del producto vectorial obtenemos directamente que  $10\hat{i} \times 3\hat{k} = -30\hat{j}$ . Ahora hay que multiplicar este resultado por el primer vector, es decir calcular  $10\hat{i} \times (-30\hat{j})$ . Volviendo a emplear la misma regla anterior, determinamos que si el resultado de  $\hat{i} \times \hat{j}$  tiene dirección de  $\hat{k}$ , el producto  $10\hat{i} \times (-30\hat{j})$  debe ser  $-300\hat{k}$ .

Se recomienda repetir los razonamientos anteriores visualizando las direcciones de los distintos vectores en el espacio tridimensional y aplicando las reglas de la mano derecha o del destornillador para verificar que las direcciones obtenidas son las correctas.

*Método 3:* Ya que el primer y segundo vector son el mismo y éste a su vez es perpendicular al tercer vector del producto, podemos aplicar directamente el resultado de la Ec. (1.18), obteniendo inmediatamente el resultado correcto:

$$10\hat{\mathbf{i}} \times (10\hat{\mathbf{i}} \times 3\hat{\mathbf{k}}) = 10^2 3(-\hat{\mathbf{k}}) = -300\hat{\mathbf{k}}$$

 **Ejemplo 1.3** Evaluar el triple producto vectorial  $5\hat{\mathbf{i}} \times (4\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{k}})$  e interpretar geoméricamente el resultado obtenido. ■

# CAPÍTULO 2

## NOCIONES DE CINEMÁTICA ANALÍTICA

### Contents

<b>2.1. Introducción</b>	<b>15</b>
<b>2.2. Coordenadas intrínsecas</b>	<b>16</b>
<b>2.3. Cinemática del sólido rígido</b>	<b>19</b>
2.3.1. Concepto de velocidad angular	19
2.3.2. Derivada de un vector constante que se traslada o rota	19
2.3.3. Caso de un punto en un sólido rígido	22
2.3.4. Caso de un punto móvil en un sistema de referencia móvil	22

### 2.1. Introducción

El estudio *cinemático* de un objeto pretende determinar cómo se mueve éste a lo largo del tiempo, sin entrar a analizar las fuerzas o momentos implicados. En esta asignatura necesitaremos describir el estado de movimiento de dos entidades muy distintas: **puntos** y **sólidos rígidos**.

Los puntos son adimensionales, es decir, de tamaño tan reducido que podemos aproximarlos bien por un punto “matemático” ideal. Normalmente nos interesaremos en puntos que a su vez forman parte de un cuerpo sólido, por lo que equivalentemente podríamos decir que nos interesará describir el estado de movimiento de un sólido rígido al completo, o solamente de una de sus partes puntuales.

La diferencia crucial entre puntos y sólidos es la necesidad de describir cómo cambia la orientación en estos últimos. Es decir, para un punto cuya posición venga dada en un sistema de coordenadas cartesianas tenemos:



#### Estado cinemático de un punto

Posición	$\mathbf{x}(t)$
Velocidad	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$
Aceleración	$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t)$

Mientras que para un sólido rígido necesitamos definir las coordenadas (posición en el espacio) de uno de sus puntos ( $\mathbf{x}(t)$ ) y, además, la orientación ( $\boldsymbol{\theta}(t)$ ) del sólido:



### Estado cinemático de un sólido rígido

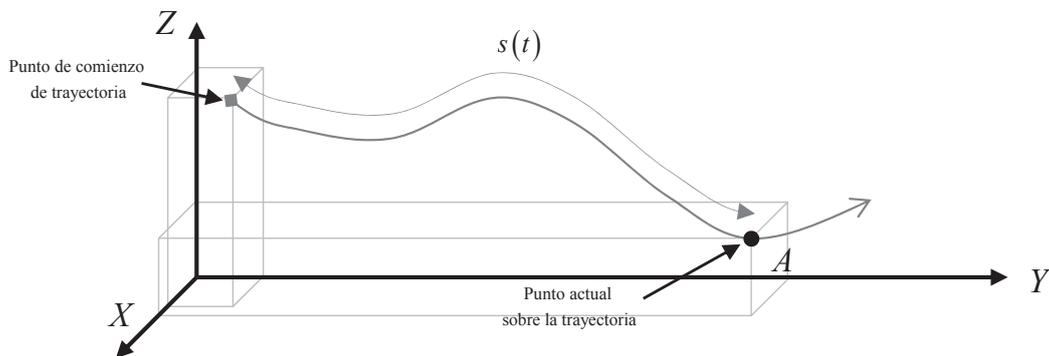
	Lineal	Angular
Posición	$\mathbf{x}(t)$	$\boldsymbol{\theta}(t)$
Velocidad	$\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$	$\vec{\omega}(t) \equiv \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\theta}(t)$
Aceleración	$\mathbf{a}(t) \equiv \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t)$	$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\theta}(t)$

En principio, tenemos total libertad para elegir el punto de referencia del sólido rígido con respecto al que medir la posición, velocidad y aceleración lineal. Normalmente convendrá elegir o su centro de gravedad o uno de los puntos de unión con otros cuerpos.

Las velocidades y aceleraciones lineales **serán distintas para cada punto** de un sólido rígido, excepto cuando éste se mueve con movimiento lineal puro (sin rotación). En cambio, las **velocidades ( $\vec{\omega}$ ) y aceleraciones ( $\boldsymbol{\alpha}$ ) angulares siempre serán idénticas** en todos los puntos de un cuerpo rígido.

## 2.2. Coordenadas intrínsecas

A la hora de estudiar el movimiento de un punto a lo largo del tiempo podemos elegir el sistemas de coordenadas que más nos convenga. Existe un sistema concreto que a veces puede ser útil: el *sistema de coordenadas intrínsecas*.



**Figura 2.1:** La curva que define la trayectoria seguida por el punto de interés. En un momento concreto  $t$  el punto está localizado en  $A$  tras recorrer una distancia  $s(t)$ , medida a lo largo de la curva de la trayectoria.

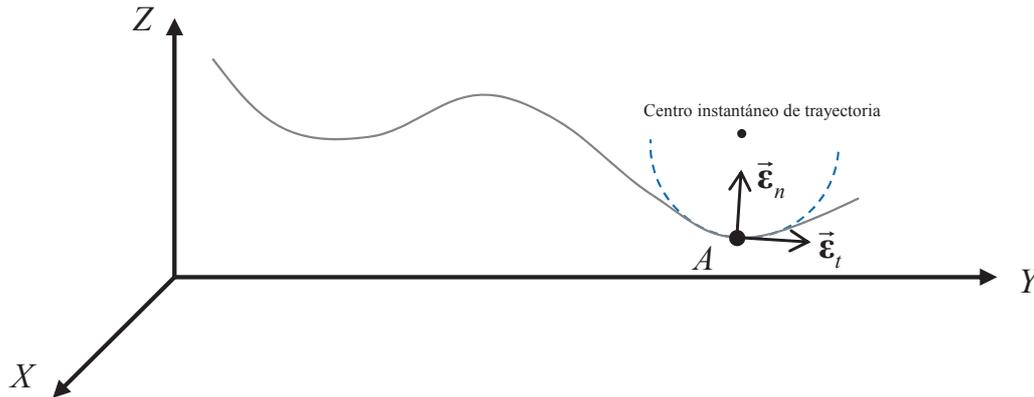
Asumamos que conocemos la trayectoria exacta que recorre el punto de interés. Podemos describirla como una función vectorial en función del tiempo, es decir:

$$\text{(Posición)} \quad \mathbf{r}(t) \quad (2.1)$$

Como se puede ver en la Figura 2.1, la trayectoria representa una curva que en principio puede tener cualquier forma. Llamemos  $s(t)$  a la función escalar que nos da la longitud de curva recorrida desde el origen de la trayectoria hasta el instante  $t$ . Nótese que esta función no afecta para nada a la *forma* de la trayectoria recorrida, ya determinada por  $\mathbf{r}(t)$ , pero sí está relacionada con la *velocidad* con la que se recorre. En concreto, si calculamos la velocidad del punto como la derivada de su posición, obtenemos mediante la regla de la cadena:

$$\text{(Velocidad)} \quad \mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\epsilon}_t} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}} = \dot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t \quad (2.2)$$

Es decir: el vector velocidad tiene en cada instante un módulo de valor  $\dot{s}$  (la derivada de la posición a lo largo de la curva, como era de esperar) y una dirección dada por el vector unitario  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ , que siempre será tangente a la curva  $\mathbf{r}(t)$  (ver Figura 2.2).



**Figura 2.2:** En cada punto de la trayectoria tenemos dos vectores unitarios cuyas direcciones están determinadas por la geometría de la trayectoria: el vector tangencial  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  y el normal  $\boldsymbol{\epsilon}_n$ .

Ahora podemos calcular el vector aceleración como la derivada de la velocidad. Aplicando la regla de la derivada del producto:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t) = \ddot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t + \dot{s}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\epsilon}_t \quad (2.3)$$

vemos que la aceleración siempre tendrá dos componentes: una primera en la misma dirección tangencial que ya tenía la velocidad (la que indica el vector unitario  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ ) y de módulo  $\ddot{s}$ . Por lo tanto, para un movimiento de velocidad constante ( $\dot{s} = \text{constante}$ ) la componente tangencial de la aceleración siempre será nula ( $\ddot{s} = 0$ ).

La segunda componente tendrá la dirección de  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\epsilon}_t$ , que se puede demostrar coincide con la dirección *centrípeta*, que apunta desde cada punto de la trayectoria hacia el centro instantáneo de la curvatura local de la trayectoria, siendo por tanto perpendicular al vector velocidad (y a  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ ). Como se ve en el ejemplo de la Figura 2.2, dicho punto se define como el centro de una circunferencia tangente al punto actual de la trayectoria y cuya radio es tal que aproxima perfectamente la forma de la trayectoria en un entorno infinitesimal alrededor del punto actual. En concreto, se demuestra que:

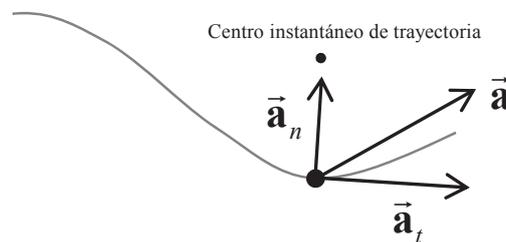
$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_t}{dt} = \frac{v}{R}\boldsymbol{\epsilon}_n \quad (2.4)$$

donde  $v$  es el módulo del vector velocidad instantáneo ( $|\mathbf{v}| = v = \dot{s}$ ),  $R$  es el radio de curvatura instantáneo y  $\boldsymbol{\epsilon}_n$  es el vector unitario en la dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura). En el caso especial de movimiento rectilíneo tenemos un radio de curvatura infinito, y el vector  $\boldsymbol{\epsilon}_n$  puede ser cualquiera perpendicular al vector  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ .

En resumen, se puede concluir que la aceleración tendrá siempre estas dos componentes (ver Figura 2.3):

$$\begin{aligned}
 \text{(Aceleración)} \quad \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n & (2.5) \\
 &= \underbrace{\ddot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t}_{\text{Aceleración tangencial}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\boldsymbol{\epsilon}_n}_{\text{Aceleración centrípeta}}
 \end{aligned}$$

El hecho de que los vectores  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_n$  siempre sean perpendiculares y definan un sistema de coordenadas local y distinto para cada punto de la trayectoria es lo que motiva el nombre de “coordenadas intrínsecas” a la trayectoria.



**Figura 2.3:** La aceleración total  $\mathbf{a}$  puede apuntar en cualquier dirección resultante de combinar una componente tangencial ( $\mathbf{a}_t$ ) y una normal ( $\mathbf{a}_n$ ). Por definición, siempre existirá una aceleración nula en la dirección perpendicular a al plano que definen  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_n$ .

En el caso de trayectorias *planas* definidas en forma  $y = f(x)$ , se puede demostrar que el radio de curvatura en cada instante se obtiene como:

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \quad (2.6)$$

mientras que para trayectorias *espaciales* (tridimensionales) tenemos la expresión más genérica:

$$R = \frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \quad (2.7)$$



#### Resumen de coordenadas intrínsecas

Posición (definición de la trayectoria)	$\mathbf{r}(t)$
Longitud recorrida sobre la trayectoria	$s(t)$
Direcciones	Tangente: $\boldsymbol{\epsilon}_t$ , Normal: $\boldsymbol{\epsilon}_n$
Velocidad	$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t$
Aceleración	$\mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\epsilon}_t + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\epsilon}_n$

## 2.3. Cinemática del sólido rígido

A continuación estudiamos algunos casos de movimientos relativos en el espacio tridimensional, para posteriormente aplicarlos al caso particular de mecanismos planos.

### 2.3.1. Concepto de velocidad angular

A pesar de que existen diferentes maneras de parametrizar la orientación de un cuerpo en el espacio (p.ej. las matrices de rotación y los cuaterniones), existe un vector único que refleja la manera en que dicha orientación varía a lo largo del tiempo: el vector de velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Este vector tiene las siguientes propiedades:

- $\vec{\omega}$  es un vector deslizante, es decir, no está asociado a ningún punto único concreto del sólido.
- Todos los puntos de un sólido rígido tienen exactamente el mismo vector de velocidad angular.
- El módulo  $|\vec{\omega}|$  indica la velocidad de rotación del sólido en rad/s.
- La dirección de  $\vec{\omega}$  es la paralela al eje instantáneo de rotación, y su sentido de giro la da por la regla de la mano derecha.
- Si dos sistemas de referencia (o sólidos rígidos)  $A$  y  $B$  mantienen una orientación relativa constante, tendremos  $\vec{\omega}_{A/B} = 0$ .
- Siempre se cumplirá que  $\vec{\omega}_{A/B} = -\vec{\omega}_{B/A}$ .
- Normalmente nos interesará el valor del vector de rotación en coordenadas absolutas, es decir, respecto al sistema inercial de referencia  $O$ . En esos casos, que serán la mayoría, usaremos la notación simplificada  $\vec{\omega}_{A/O} \equiv \vec{\omega}_A$ .

Mención aparte merece el *teorema de la suma* de la velocidad angular por su uso práctico:



Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres sistemas de referencia cualquiera. Siempre se cumplirá: (2.8)

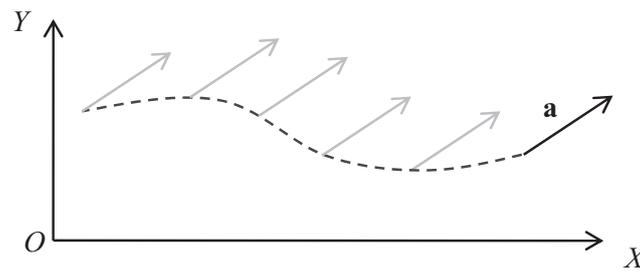
$$\vec{\omega}_{A/C} = \vec{\omega}_{A/B} + \vec{\omega}_{B/C}$$

donde típicamente  $C$  suele ser el marco inercial ("O") y se omite de la notación.

### 2.3.2. Derivada de un vector constante que se traslada o rota

La mayoría de fórmulas de aplicación práctica se pueden obtener aplicando las sencillas reglas de derivación que vimos en la sección 1.4, donde siempre acabarán apareciendo **derivadas de vectores**. Vamos a considerar por ello un primer caso sencillo: el de un vector de **módulo constante** que se desplaza solidariamente a un sistema de coordenadas móvil.

Si el sistema de coordenadas móvil solamente se traslada (sin rotar), el vector (llamémosle  $\mathbf{a}$ ) simplemente se desplazará junto a él. No cambiará su orientación ni su módulo, como se ilustra en la Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Un vector “fijo”  $\mathbf{A}$  que se traslada en el plano.

Nótese que un vector genérico representa una dirección y un módulo, y por lo tanto no “está físicamente” en ningún lugar concreto, luego trasladarlo no cambia para nada las coordenadas que lo describen. Por lo tanto, para un vector de módulo constante que solamente se traslada, tenemos que su derivada debe ser cero:



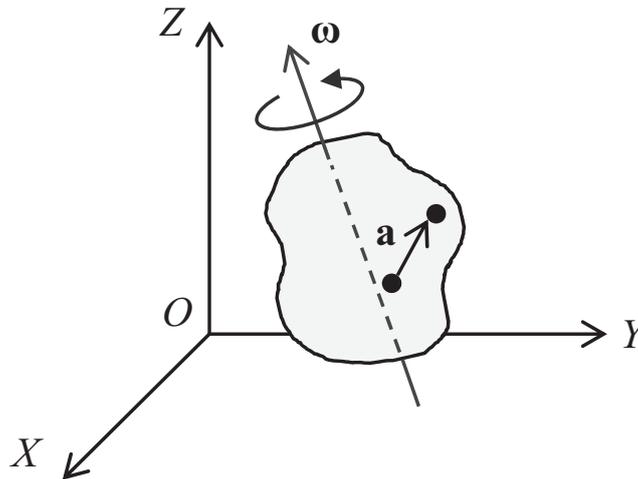
$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$$

(Para  $|\mathbf{a}|$  constante y movimiento de traslación pura)

(2.9)

Ya hemos visto que a la hora de calcular la derivada de un vector de módulo constante no debemos preocuparnos por si sufre una traslación. Sin embargo, en caso de existir rotación ésta sí que afectará a su derivada.

Sea un vector de módulo constante  $\mathbf{a}$ , fijado a un sistema que rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  como en la Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Un vector “fijo”  $\mathbf{a}$  que rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$ .

En este caso las coordenadas del vector  $\mathbf{a}$  en coordenadas globales (de  $O$ ) sí que varían a lo largo del tiempo, a pesar de ser un vector “fijo” respecto al sistema que rota. Se puede demostrar que ahora obtenemos:



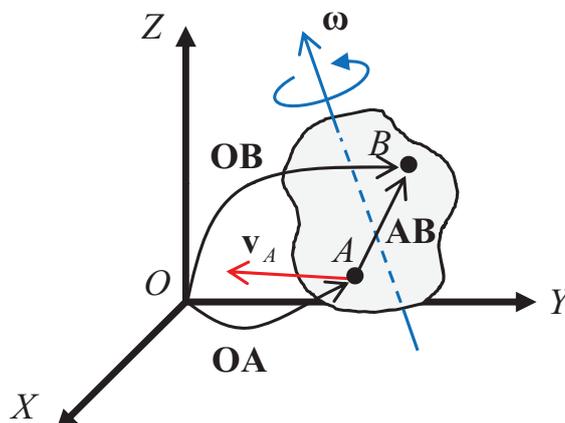
$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{a} \quad (2.10)$$

(Para  $|\mathbf{a}|$  constante y movimiento con rotación)

En este apartado hemos tratado la derivada de un vector genérico, cuyo significado físico bien podría ser la posición relativa de dos puntos, una aceleración, o una velocidad angular. El resto de situaciones estudiadas a continuación son en última instancia aplicaciones concretas del resultado general de la Ec. (2.10), pero todas tendrán una interpretación física mucho más clara en términos de velocidades y aceleraciones.

### 2.3.3. Caso de un punto en un sólido rígido

Sea un sólido rígido como el mostrado en la Figura 2.6. Si conocemos la velocidad y aceleración de un punto  $A$  perteneciente a dicho cuerpo y la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del cuerpo completo, seremos capaces de determinar la velocidad y aceleración de cualquier otro punto  $B$  del sólido.



**Figura 2.6:** Dos puntos  $A$  y  $B$  de un cuerpo rígido con movimiento de traslación y rotación. Nótese que la velocidad del punto  $A$  podría apuntar en cualquier dirección independientemente de la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del cuerpo.



$$\begin{aligned}
 \text{(Posición)} \quad \mathbf{OB} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AB} \\
 \text{(Velocidad)} \quad \mathbf{v}_B &= \underbrace{\mathbf{v}_A}_{\text{Vel. arrastre}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \mathbf{AB}}_{\text{Vel. relativa } (\mathbf{v}_B)_A} \\
 \text{(Acel.)} \quad \mathbf{a}_B &= \underbrace{\mathbf{a}_A}_{\text{Acel. arrastre}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB})}_{\text{Acel. relativa } (\mathbf{a}_B)_A}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

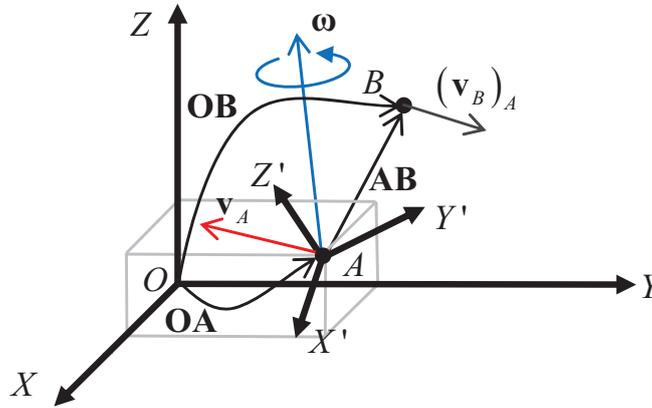
La primera ecuación, para  $\mathbf{OB}$ , nos da la posición en coordenadas globales del punto  $B$  y se puede obtener inmediatamente al reconocer que la geometría de la figura implica la suma de dos vectores ( $\mathbf{OA}$  y  $\mathbf{AB}$ ) para obtener un tercero deseado ( $\mathbf{OB}$ ). Sería muy recomendable realizar, como ejercicio, las derivadas primeras y segundas con respecto al tiempo para verificar que efectivamente se obtienen la segunda y tercera ecuación.

Es importante recalcar que todos los vectores que aparecen en la Ec. (2.11) están definidos en coordenadas globales, es decir, según el sistema de coordenadas en el cuál queremos calcular la velocidad o aceleración (en la figura corresponde al sistema  $XYZ$  con origen en  $O$ ). Por esto se recomienda hacer coincidir la orientación de todos los sistemas de coordenadas con el global, con el fin de evitar confusiones.

### 2.3.4. Caso de un punto móvil en un sistema de referencia móvil

Consideremos ahora un sistema móvil con origen en el punto  $A$ , como se muestra en la Figura 2.7. Al igual que en el caso anterior, asumimos conocidas la velocidad ( $\mathbf{v}_A$ ) y aceleración ( $\mathbf{a}_A$ ) de dicho punto y deseamos obtener las de un segundo punto  $B$ . Pero a diferencia del caso anterior en que  $A$  y  $B$  se movían como un sólido rígido, **ahora  $B$  tiene un estado de movimiento relativo a  $A$** . A la velocidad del punto  $B$  relativa

al origen del sistema móvil  $A$  le llamaremos  $(\mathbf{v}_B)_A$  para diferenciarla de su velocidad en coordenadas globales respecto a  $O$ , que denotamos simplemente como  $\mathbf{v}_B$ . De manera similar definimos la **aceleración relativa de  $B$  con respecto a  $A$** , que escribiremos como  $(\mathbf{a}_B)_A$  para diferenciarla de su aceleración global  $\mathbf{a}_B$ .



**Figura 2.7:** Sistema móvil  $A$  con respecto al cuál se mueve un punto  $B$ .

El sistema móvil con origen en  $A$  tiene a su vez una componente de movimiento debido a rotación, siguiendo una velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Entonces, obtenemos:

i

(Pos.)	$\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB}$	
(Vel.)	$\mathbf{v}_B = \underbrace{\mathbf{v}_A}_{\text{Vel. arrastre}} + \underbrace{(\mathbf{v}_B)_A + \vec{\omega} \times \mathbf{AB}}_{\text{Vel. relativa total}}$	(2.12)
(Acel.)	$\mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_A}_{\text{Acel. arrastre}} + \underbrace{(\mathbf{a}_B)_A + \ddot{\vec{\omega}} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB})}_{\text{Acel. relativa total}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times (\mathbf{v}_B)_A}_{\text{Acel. de Coriolis}}$	

Es interesante comparar la Ec. (2.12) con la Ec. (2.11) y notar que el caso del sólido rígido estudiado anteriormente es un caso particular del estudiado ahora, al que se llega cuando el vector  $\mathbf{AB}$  es constante (respecto a  $A$ ) y por tanto  $(\mathbf{v}_B)_A = 0$  y  $(\mathbf{a}_B)_A = 0$ .

	$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}$ <p>(Para <math> \mathbf{a} </math> constante y movimiento con rotación)</p>
	<p>(Posición) <math>\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB}</math></p> <p>(Velocidad) <math>\mathbf{v}_B = \underbrace{\mathbf{v}_A}_{\text{Vel. arrastre}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}}_{\text{Vel. relativa } (\mathbf{v}_B)_A}</math></p> <p>(Aceleración) <math>\mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_A}_{\text{Acel. arrastre}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB})}_{\text{Acel. relativa } (\mathbf{a}_B)_A}</math></p>
	<p>(Pos.) <math>\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB}</math></p> <p>(Vel.) <math>\mathbf{v}_B = \underbrace{\mathbf{v}_A}_{\text{Vel. arrastre}} + \underbrace{(\mathbf{v}_B)_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}}_{\text{Vel. relativa total}}</math></p> <p>(Acel.) <math>\mathbf{a}_B = \underbrace{\mathbf{a}_A}_{\text{Acel. arrastre}} + \underbrace{(\mathbf{a}_B)_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB})}_{\text{Acel. relativa total}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_B)_A}_{\text{Acel. de Coriolis}}</math></p>

Cuadro 2.1: Resumen de los tres casos de movimiento estudiados en este tema.

# CAPÍTULO 3

---

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Contents

---

3.1. Examen Feb-2010 . . . . .	26
3.2. Examen Feb-2013 . . . . .	31
3.3. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1]) . . . .	35
3.4. Examen Feb-2014 . . . . .	37

---

### 3.1. Examen Feb-2010

El siguiente mecanismo corresponde a un caballito de feria en el que el movimiento de vaivén se produce por el giro del eslabón AB a una velocidad angular  $\omega_0$  en sentido horario ( $\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0 \hat{\mathbf{i}}$ ), mientras el punto C se desliza sobre una ranura vertical tal y como se muestra en la figura 3.1.

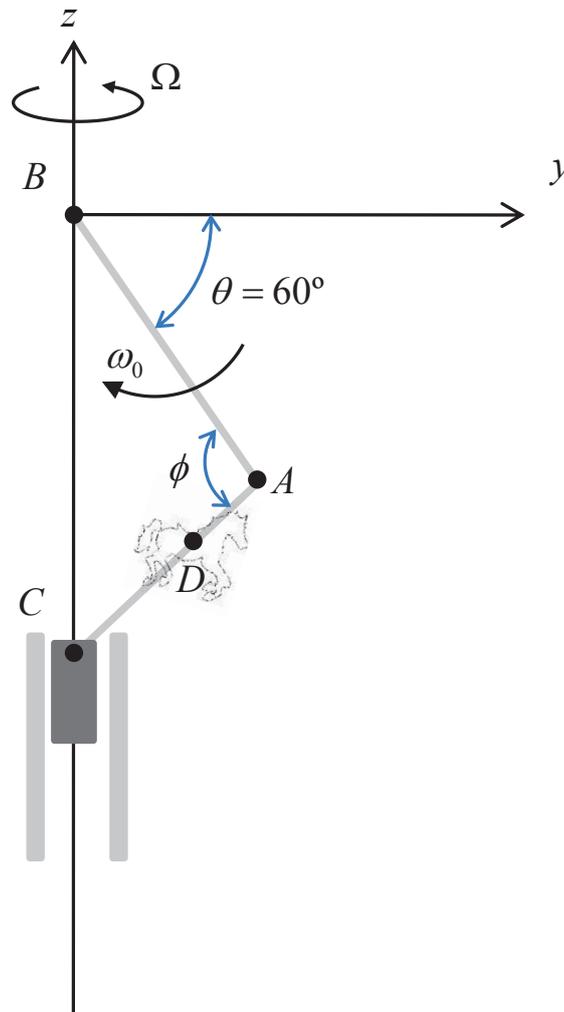


Figura 3.1

Sabiendo que en el instante inicial el ángulo en A es un ángulo recto ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ), que  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , y que el punto D está situado en la barra AC (de longitud  $|AC| = R$ ) a una distancia desde A de  $\frac{1}{3}R$ , calcular:

1. La velocidad angular  $\omega_{AC}$  de la barra AC en función de los valores iniciales.
2. La velocidad del caballito (del punto D).
3. La aceleración del mismo punto, sabiendo que  $\mathbf{a}_A = \omega_0^2 \frac{R}{8} (-\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$  y que el movimiento de la barra AC puede considerarse uniforme.

Además del movimiento de vaivén del caballito, se considera ahora la rotación uniforme en sentido antihorario  $\Omega$  de la plataforma del tiovivo, alrededor de un eje vertical

que pasa por el centro de la plataforma. Considerando que el caballito está situado a una distancia de 2 metros del eje de giro (quedando éste a su izquierda), calcular:

4. La velocidad absoluta del caballito.
5. La aceleración absoluta del caballito.

### Solución

1. ¿Velocidad angular  $\omega_{AC}$  de la barra AC?

Debido a la restricción en el punto C, para cada posición de la barra AB, la AC se ve forzada a desplazarse a una única posición compatible. Se ve por lo tanto que una velocidad angular  $\omega_0$  en AB induce otra velocidad angular en AC de sentido contrario:

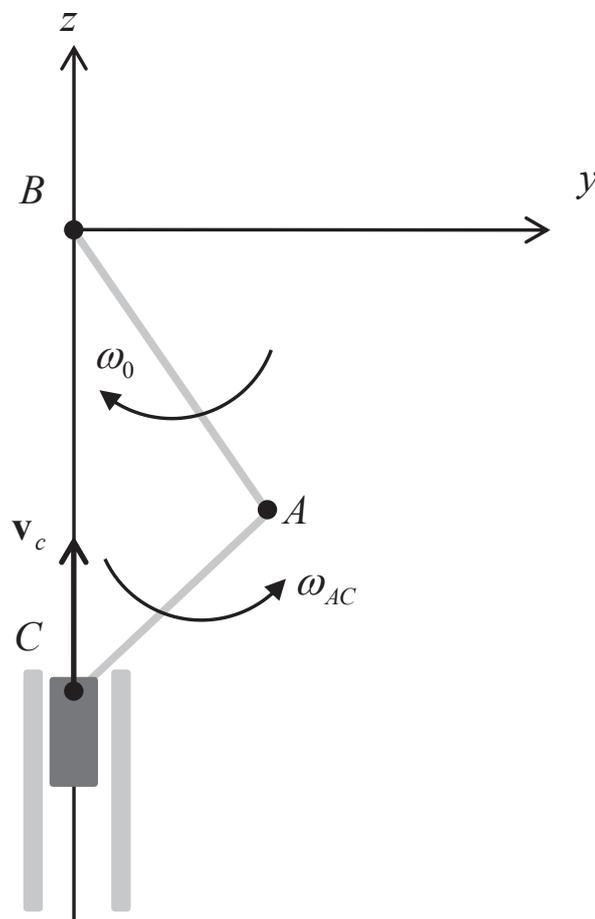


Figura 3.2

Para averiguar la velocidad angular  $\omega_{AC}$  vamos a buscar su relación con la velocidad del punto C,  $\mathbf{v}_C$  para imponer la restricción de que su componente horizontal debe ser nula (por la deslizadera). Esto nos proporcionará la ecuación necesaria para despejar la incógnita buscada.

La velocidad del punto C respecto al sistema de referencia (el punto B) corresponde al caso de movimiento relativo de un punto (el C) que forma parte de un sólido (la barra AC) que rota a una velocidad angular dada ( $\omega_{AC}$ ) y del que conocemos la velocidad de uno de sus puntos (la del punto A). Por tanto, la fórmula a usar es:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times \mathbf{AC} \quad (3.1)$$

La velocidad del punto A en el momento de interés la podemos obtener como la derivada con el tiempo de su vector de posición ( $\mathbf{BA}$ ), cuyo módulo es  $\sqrt{3}R$  y que al ser un vector fijo que gira a velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_0$ , vale:

$$\mathbf{v}_A \equiv \dot{\mathbf{BA}} \equiv \frac{d\mathbf{BA}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{BA} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A|_{t=0} &= (-\hat{i}\omega_0) \times (\sqrt{3}R \cos 60^\circ \hat{j} - \sqrt{3}R \sin 60^\circ \hat{k}) \\ &= (-\hat{i}\omega_0) \times R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}\right) \\ &= \omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2} (-\sqrt{3}\hat{j} - \hat{k}) \end{aligned} \quad (3.2b)$$

Además, por la geometría del problema:

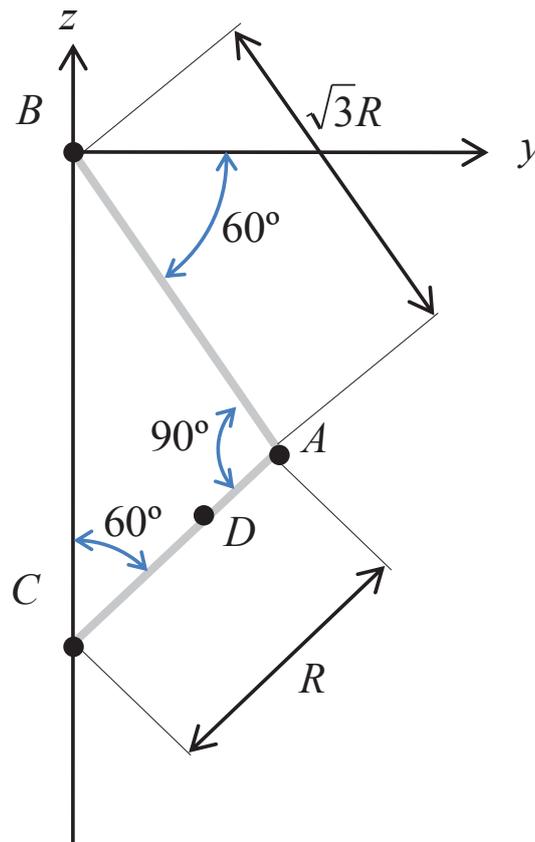


Figura 3.3

sabemos que para el instante de interés:

$$\mathbf{AC}|_{t=0} = R(-\sin 60^\circ \hat{j} - \cos 60^\circ \hat{k}) = -\frac{R}{2}(\sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}) \quad (3.3)$$

Como  $\omega_{AC} = \omega_{AC}\hat{\mathbf{i}}$  y sustituyendo 3.3 y 3.2 en 3.1:

$$\mathbf{v}_C|_{t=0} = -\omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2}(\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + (\omega_{AC}\hat{\mathbf{i}}) \times \left[ -\frac{R}{2}(\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \right] \quad (3.4a)$$

$$= -\omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2}(\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) - \omega_{AC} \frac{R}{2}(\sqrt{3}\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}) \quad (3.4b)$$

$$= \hat{\mathbf{j}} \left( -\omega_0 \frac{3R}{2} + \omega_{AC} \frac{R}{2} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left( -\omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2} - \omega_{AC} \frac{\sqrt{3}R}{2} \right) \quad (3.4c)$$

Podemos ahora aplicar la restricción del movimiento del punto C, que al no poder moverse más que verticalmente (eje Z) implica que:

$$\mathbf{v}_C = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + v_c\hat{\mathbf{k}} \quad (3.5)$$

Igualando esta última expresión con 3.4 componente vectorial a componente vectorial, llegamos a un sistema de dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Componente en } \hat{\mathbf{j}} \text{ de la ec. 3.4} \\ 0 = \overbrace{-\omega_0 \frac{3R}{2} + \omega_{AC} \frac{R}{2}} \\ v_c = \underbrace{-\omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2} - \omega_{AC} \frac{\sqrt{3}R}{2}} \\ \text{Componente en } \hat{\mathbf{k}} \text{ de la ec. 3.4} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

donde aparecen dos incógnitas  $v_c$  y  $\omega_{AC}$ . Por lo tanto, podemos despejar ambas fácilmente:

$$\omega_{AC} = 3\omega_0 \quad (3.7a)$$

$$v_c = -\omega_0 2R\sqrt{3} \quad (3.7b)$$

donde ya tenemos la velocidad angular pedida  $\omega_{AC}$ . Nótese cómo la velocidad del punto C se obtiene negativa por haberse tomado positiva en el sentido positivo del eje Z mientras que, como es lógico, para  $\omega_0 > 0$  el punto C baja en el momento de interés.

## 2. ¿Velocidad $\mathbf{v}_D$ del punto D?

Nos encontramos con una situación idéntica al apartado anterior: conocida la velocidad de un punto (A) de un sólido rígido (la barra AC) que rota a velocidad angular dada ( $\omega_{AC}$ ), obtener la velocidad de un punto de dicho sólido (en este caso, el D). Por lo tanto, usamos la fórmula:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \omega_{AC} \times \mathbf{AD} \quad (3.8)$$

donde directamente sustituimos todos los valores, que son conocidos, y operamos para obtener:

$$\mathbf{v}_D = -\omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2}(\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + 3\omega_0\hat{\mathbf{i}} \times \left( -\frac{R}{3} \sin 60^\circ \hat{\mathbf{j}} - \frac{R}{3} \cos 60^\circ \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (3.9a)$$

$$= -\omega_0 \frac{3}{2} R \hat{\mathbf{j}} - \omega_0 \frac{\sqrt{3}R}{2} \hat{\mathbf{k}} - \omega_0 R \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \omega_0 R \hat{\mathbf{j}} \quad (3.9b)$$

$$= \omega_0 R \left( -\hat{\mathbf{j}} - \sqrt{3}\hat{\mathbf{k}} \right) \quad (3.9c)$$

3. ¿Aceleración  $\mathbf{a}_D$  del punto  $D$ ?

Sabiendo que la aceleración del punto  $A$  es:

$$\mathbf{a}_A = \omega_0^2 \frac{R}{8} (-\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.10)$$

podemos calcular la aceleración del punto  $D$  derivando 3.8 con respecto al tiempo, es decir:

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \overset{0}{\vec{\omega}}_{AC} \times \mathbf{AD} + \overset{0}{\vec{\omega}}_{AC} \times \underbrace{(\overset{0}{\vec{\omega}}_{AC} \times \mathbf{AD})}_{\mathbf{AD}} \quad (3.11a)$$

$$= \omega_0^2 \frac{R}{8} (-\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times + 3\omega_0 \hat{\mathbf{i}} \times \left( -\omega_0 R \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \omega_0 R \hat{\mathbf{j}} \right) \quad (3.11b)$$

$$= \omega_0^2 R \left[ \frac{11\sqrt{3}}{8} \hat{\mathbf{j}} + \frac{13}{8} \hat{\mathbf{k}} \right] \quad (3.11c)$$

4. Incluyendo el giro  $\Omega$ , ¿cuál es la velocidad absoluta del punto  $D$ ?

En este caso tenemos un movimiento relativo de velocidad  $\mathbf{v}_D$  con respecto a al eje de giro del tiiovivo, que rota con velocidad angular  $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{k}}$ . Asumiendo que la distancia del punto  $D$  al eje de giro del tiiovivo es de  $D = 2m$ , tenemos:

$$(\mathbf{v}_D)_{abs} = \mathbf{v}_D + \overset{0}{\vec{R}} + \Omega \times \overset{2\hat{\mathbf{j}}}{\mathbf{D}} \quad (3.12a)$$

$$= \mathbf{v}_D + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times 2\hat{\mathbf{j}} \quad (3.12b)$$

$$= -\omega_0 R \hat{\mathbf{j}} - \omega_0 \sqrt{3} R \hat{\mathbf{k}} - 2\Omega \hat{\mathbf{i}} \quad (3.12c)$$

Fíjese en que solamente importa la distancia al eje de giro, y no la posición exacta del punto de referencia tomado en dicho eje. Matemáticamente, esto viene del hecho de que la componente vertical del vector posición relativa de  $D$  no contribuye a la velocidad relativa al ser un vector paralelo a  $\Omega$ .

5. ¿Y la aceleración absoluta del punto  $D$ ?

Sólo hay que reemplazar, en la fórmula de aceleración relativa, los valores ya conocidos de velocidad (3.9) y aceleración (3.11) relativa del punto  $D$  con respecto al tiiovivo, obteniendo:

$$(\mathbf{a}_D)_{abs} = \mathbf{a}_D + \overset{0}{\vec{R}} + \overset{0}{\vec{\omega}} \times \mathbf{D} + \Omega \times (\Omega \times \overset{2\hat{\mathbf{j}}}{\mathbf{D}}) + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{v}_D}_{\text{Ac. de Coriolis}} \quad (3.13a)$$

$$= \mathbf{a}_D + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times (\Omega \hat{\mathbf{k}} \times 2\hat{\mathbf{j}}) + 2\Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_D \quad (3.13b)$$

$$= \omega_0^2 R \frac{11}{8} [\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}] - 2\Omega^2 \hat{\mathbf{j}} + 2\Omega \hat{\mathbf{k}} \times \left( \omega_0 \frac{R}{4} \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \right] \right) \quad (3.13c)$$

### 3.2. Examen Feb-2013

Mientras el profesor explica el tema de movimiento relativo, un alumno de teoría de mecanismos está concentrado en responder un WhatsApp en su móvil. Considere el sistema mecánico formado por la palma de la mano con que sostiene el móvil (que se considerará el sistema de referencia o "tierra") y los dos huesos (falanges) del dedo pulgar. Se pide:

1. Considerar el movimiento del pulgar cuando se mueve hacia la pantalla táctil (ver figura), cuando solamente existe velocidad y aceleración angular de  $OA$  con respecto a tierra y de  $AB$  con respecto a  $OA$ . Es decir, en este caso  $\omega_3 = 0$ . Calcular la velocidad y aceleración del extremo del dedo (punto  $B$ ) con respecto a la palma de la mano. Nota: La velocidad angular  $\omega_2$  dada como dato se corresponde a la relativa del eslabón  $AB$  con respecto al  $OA$ .
2. Si al caso anterior se le añade ahora un giro del pulgar para alcanzar una letra que está situada más a la izquierda, con velocidad constante  $\omega_3 = 2 \text{ rad/s}$ , ¿cuánto valen ahora la velocidad y aceleración del extremo del dedo?

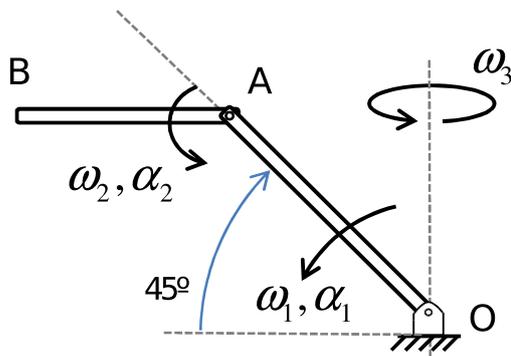


Figura 3.4



Figura 3.5

Datos:  $|AB| = 3 \text{ cm}$ ,  $|OA| = 4 \text{ cm}$ ,  $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_1 = 3 \text{ rad/s}^2$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_2 = 4 \text{ rad/s}^2$ .

#### Solución

1. Movimiento del pulgar (con  $\omega_3 = 0$ ).

Usamos el siguiente sistema de coordenadas  $XYZ$  (con  $Z$  saliendo del papel):

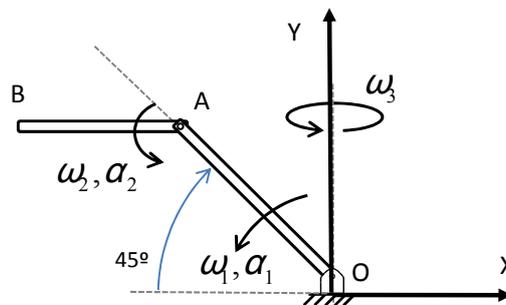


Figura 3.6

Se ve que existen dos sólidos rígidos:  $OA$  y  $AB$ . Uno podría estar tentado de resolver el problema planteando el movimiento del punto  $B$  directamente con respecto al punto

$O$  y usar las ecuaciones mostradas en §2.3.3, pero sería incorrecto ya que no existe un único sólido rígido desde  $O$  hasta  $B$ , sino dos.

Podemos obtener la velocidad del punto  $B$  usando el hecho de que  $B$  pertenece al sólido rígido  $AB$  y a partir de la velocidad del punto  $A$  sobre el eslabón  $AB$ .

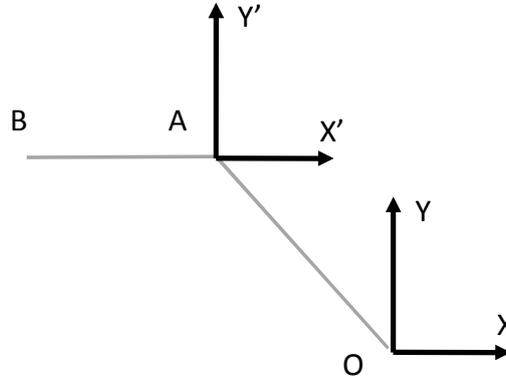


Figura 3.7

Entonces:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{AB} \quad (3.14)$$

donde todos los vectores están dados en el sistema de coordenadas XYZ global. La velocidad de  $A$  se obtiene fácilmente fijándose en que dicho punto también pertenece al sólido rígido  $OA$ , que rota alrededor de  $O$  (punto estático) con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_{OA} = 5\hat{\mathbf{k}}$ :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{OA} \quad (3.15a)$$

$$= 5\hat{\mathbf{k}} \times 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}\right) \text{ (cm/s)} \quad (3.15b)$$

$$= \frac{20}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})) \text{ (cm/s)} \quad (3.15c)$$

$$= \frac{20}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) \text{ (cm/s)} \quad (3.15d)$$

Como la velocidad angular del eslabón  $AB$  resulta de combinar (sumar vectorialmente) las de  $OA$  ( $\boldsymbol{\omega}_1$ ) y la relativa de  $AB$  con respecto a  $OA$  ( $\boldsymbol{\omega}_2$ ), tenemos:

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = 5\hat{\mathbf{k}} + 10\hat{\mathbf{k}} = 15\hat{\mathbf{k}} \quad (3.16a)$$

Sustituyendo este valor en la Ec. (3.14):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{AB}}_{=15\hat{\mathbf{k}}} \times \underbrace{\mathbf{AB}}_{=-3\hat{\mathbf{i}}} \quad (3.17a)$$

$$= \frac{20}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) - 45 \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}})}_{=\hat{\mathbf{j}}} \text{ (cm/s)} \quad (3.17b)$$

$$= -\frac{20}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{20}{\sqrt{2}} + 45\right)\hat{\mathbf{j}} \text{ (cm/s)} \quad (3.17c)$$

$$\approx -14.142\hat{\mathbf{i}} - 59.142\hat{\mathbf{j}} \text{ (cm/s)} \quad (3.17d)$$

$$(3.17e)$$

Para calcular la aceleración de  $B$  planteamos la ecuación correspondiente, de nuevo tomando el sólido rígido como  $AB$ , el punto conocido  $A$  y el punto a obtener  $B$ :

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{AB}) \quad (3.18)$$

para lo que primero necesitamos la aceleración del punto  $A$ :

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O^0 + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{OA}}_{=\boldsymbol{\alpha}_1} \times \mathbf{OA} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{OA}}_{=\boldsymbol{\omega}_1} \times \underbrace{(\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{OA})}_{=\mathbf{v}_A} \quad (3.19a)$$

$$= 3\hat{\mathbf{k}} \times \left( \frac{4}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \right) + 5\hat{\mathbf{k}} \times \frac{20}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) \quad (cm/s^2) \quad (3.19b)$$

$$= \frac{12}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})) + \frac{100}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{k}} \times (-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})) \quad (cm/s^2) \quad (3.19c)$$

$$= \underbrace{\frac{12}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}})}_{\text{Aceleración tangencial}} + \underbrace{\frac{100}{\sqrt{2}}(-\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}})}_{\text{Aceleración normal}} \quad (cm/s^2) \quad (3.19d)$$

$$= \frac{88}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{112}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} \quad (cm/s^2) \quad (3.19e)$$

$$\approx 62.225\hat{\mathbf{i}} - 79.196\hat{\mathbf{j}} \quad (cm/s^2) \quad (3.19f)$$

y dado que:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_{AB}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 7\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2 \quad (3.20)$$

podemos sustituir todo en la Ec. (3.18) para obtener la aceleración de  $B$ :

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{AB}) \quad (3.21a)$$

$$= \left( \frac{88}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{112}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} \right) + 7\hat{\mathbf{k}} \times (-3\hat{\mathbf{i}}) + 15\hat{\mathbf{k}} \times (15\hat{\mathbf{k}} \times (-3\hat{\mathbf{i}})) \quad (cm/s^2) \quad (3.21b)$$

$$= \left( \frac{88}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{112}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} \right) - 21\hat{\mathbf{j}} + 675\hat{\mathbf{i}} \quad (cm/s^2) \quad (3.21c)$$

$$= \left( \frac{88}{\sqrt{2}} + 675 \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( -\frac{112}{\sqrt{2}} - 21 \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (cm/s^2) \quad (3.21d)$$

$$\approx 737.23\hat{\mathbf{i}} - 100.2\hat{\mathbf{j}} \quad (cm/s^2) \quad (3.21e)$$

2. Incluyendo giro (con  $\omega_3 \neq 0$ ).

#### Método de resolución #1

Ahora, el sistema formado por los eslabones  $OA-AB$  gira sobre el eje  $Y$  con  $\omega_3 = 2\hat{\mathbf{j}}$ , por lo que el origen de coordenadas  $XYZ$  usado anteriormente ya no está estático. Necesitamos por tanto definir un nuevo marco de referencia ( $X''Y''Z''$ ) fijo, con respecto al cual gira todo el sistema considerado en el punto anterior. Esquemáticamente, la situación se podría representar así:

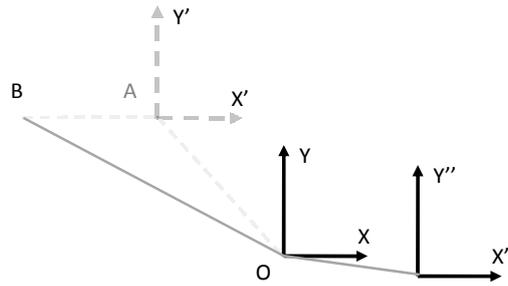


Figura 3.8

donde  $XYZ$  se ha dibujado separado de  $X''Y''Z''$  por claridad, aunque realmente compartan el mismo punto origen de coordenadas  $O$  y sólo se diferencien en el giro debido a  $\omega_3$  y  $\alpha_3$  (que en este caso es cero).

Bajo esta perspectiva, el movimiento del punto  $B$  se puede estudiar como un caso de “un punto móvil en un marco de referencia móvil” (ver §2.3.4)<sup>1</sup>. Conociendo la velocidad y aceleración del punto  $B$  con respecto a  $XYZ$  (las  $\mathbf{v}_B$  y  $\mathbf{a}_B$ ) del apartado anterior, aplicamos las ecuaciones vistas en §2.3.4) para introducir el efecto del giro alrededor del eje  $Y$ :

$$\begin{aligned}
 {}^{X''Y''Z''}\mathbf{v}_B &= \underbrace{{}^{XYZ}\mathbf{v}_B}_{=Ec. (3.17)} + \underbrace{{}^{XYZ}\mathbf{v}_O}_{=0} + \underbrace{\omega_3}_{2\hat{\mathbf{j}}} \times \mathbf{OB} \\
 &= -\frac{20}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{20}{\sqrt{2}} + 45\right)\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times \left[\left(-3 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}\right] \text{ (cm/s)} \\
 &\approx -14.142\hat{\mathbf{i}} + 30.858\hat{\mathbf{j}} + 11.657\hat{\mathbf{k}} \text{ (cm/s)} \quad (3.22a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{X''Y''Z''}\mathbf{a}_B &= \underbrace{{}^{XYZ}\mathbf{a}_B}_{=Ec. (3.21)} + \underbrace{{}^{XYZ}\mathbf{a}_O}_{=0} + \overset{0}{\omega_3} \times \mathbf{OB} \\
 &\quad + \omega_3 \times (\omega_3 \times \mathbf{OB}) + 2\omega_3 \times \underbrace{{}^{XYZ}\mathbf{v}_B}_{=Ec. (3.17)} \quad (3.23a)
 \end{aligned}$$

$$\approx 760.544\hat{\mathbf{i}} - 100.2\hat{\mathbf{j}} + 56.568\hat{\mathbf{k}} \text{ (cm/s}^2\text{)} \quad (3.23b)$$

### Método de resolución #2

Alternativamente, podemos reutilizar las mismas ecuaciones del primer apartado (donde  $\omega_3 = 0$ ) teniendo en cuenta ahora que en la velocidad angular de los dos eslabones debe añadirse la nueva componente  $\omega_3$ . Es decir, ahora tendríamos:

$$\omega_{0A} = \omega_1 + \omega_3 = 5\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{j}} \text{ (rad/s)} \quad (3.24a)$$

$$\omega_{AB} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 5\hat{\mathbf{k}} + 10\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{j}} = 15\hat{\mathbf{k}} + 2\hat{\mathbf{j}} \text{ (rad/s)} \quad (3.24b)$$

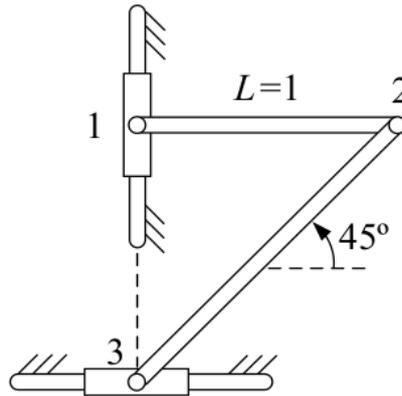
Sustituyendo estos nuevos valores en las ecuaciones para  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$ ,  $\mathbf{a}_A$  y  $\mathbf{a}_B$  obtendríamos también el mismo resultado que el mostrado arriba.

<sup>1</sup>De nuevo, insistir en que no se puede asumir que el punto  $B$  se mueve como un punto rígido dentro del sistema de referencia  $XYZ$ .

### 3.3. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1])

Para el mecanismo de la siguiente figura, hallar la velocidad y aceleración instantáneas del punto 2.

Datos: Velocidades  $\vec{v}_1 = 1\hat{j}(m/s)$ ,  $\vec{v}_3 = 1\hat{i}(m/s)$ ; aceleraciones  $\vec{a}_1 = 1\hat{j}(m/s^2)$ ,  $\vec{a}_3 = 1\hat{i}(m/s^2)$ .



#### Solución

Debemos buscar ecuaciones de movimiento que ligen las variables conocidas (estado de los puntos 1 y 3) con las desconocidas (las del punto 2). En este caso, se ven claramente las dos relaciones existentes:

- **Sólido rígido 12:** Ya que el punto 2 pertenece a la barra 12, usamos el punto 1 como punto de referencia para plantear la ecuación de movimiento de un punto dentro de un sólido rígido:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_{12} \times \vec{12} \quad (3.25)$$

- **Sólido rígido 32:** Igualmente podemos plantear otra ecuación similar basándonos en que 2 pertenece a la barra 32:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{\omega}_{32} \times \vec{32} \quad (3.26)$$

Como vimos, es importante el orden en que cada término aparece en estas ecuaciones, aunque se pueden intercambiar los papeles jugados por los dos puntos que aparecen en cada una siempre y cuando también se cambie el sentido del vector que les une. Por ejemplo, la Ec. (3.25) seguiría siendo correcta como  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_{12} \times \vec{21}$ .

Juntando las ecuaciones 3.25–eq:avello43.vb1 obtenemos un sistema de 4 ecuaciones (recuerda que cada ecuación vectorial en el plano cuenta como dos) con cuatro incógnitas escalares, que es importante saber identificar:  $v_{2x}$ ,  $v_{2y}$ ,  $\omega_{12}$  y  $\omega_{32}$  (donde  $\vec{v}_2 = v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j}$ ). Planteándolas y despejando, obtenemos la solución:

$$\vec{v}_2 = 1\hat{j} \quad (m/s) \quad (3.27a)$$

$$\omega_{12} = 0 \quad (rad/s) \quad (3.27b)$$

$$\omega_{32} = 1 \quad (rad/s) \quad (3.27c)$$

Idénticamente a como se ha hecho para velocidades podemos plantear las ecuaciones de aceleración para un punto (el 2) que pertenece a un sólido rígido (las barras 12 y 23), planteando otro sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{a}}_2 &= \vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \times \vec{\mathbf{1}}_2 - \omega_{12}^2 \vec{\mathbf{1}}_2 \\ \vec{\mathbf{a}}_2 &= \vec{\mathbf{a}}_3 + \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{32} \times \vec{\mathbf{3}}_2 - \omega_{32}^2 \vec{\mathbf{3}}_2 \end{cases} \quad (3.28)$$

donde de nuevo tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas escalares ( $v_{2x}$ ,  $v_{2y}$ ,  $\omega_{12}$  y  $\omega_{32}$ ). Despejando, obtenemos las aceleraciones angulares de las barras, junto a las aceleraciones pedidas del punto 2:

$$\vec{\mathbf{a}}_2 = -1\hat{\mathbf{j}} \quad (m/s^2) \quad (3.29a)$$

$$\alpha_{12} = -2 \quad (rad/s^2) \quad (3.29b)$$

$$\alpha_{32} = 0 \quad (rad/s^2) \quad (3.29c)$$

### 3.4. Examen Feb-2014

Dado el mecanismo de la figura, y sabiendo que el disco gira a velocidad constante de 90 rpm en sentido horario, se pide:

1. Calcular la velocidad del punto extremo de la barra (punto 2) por el método analítico.

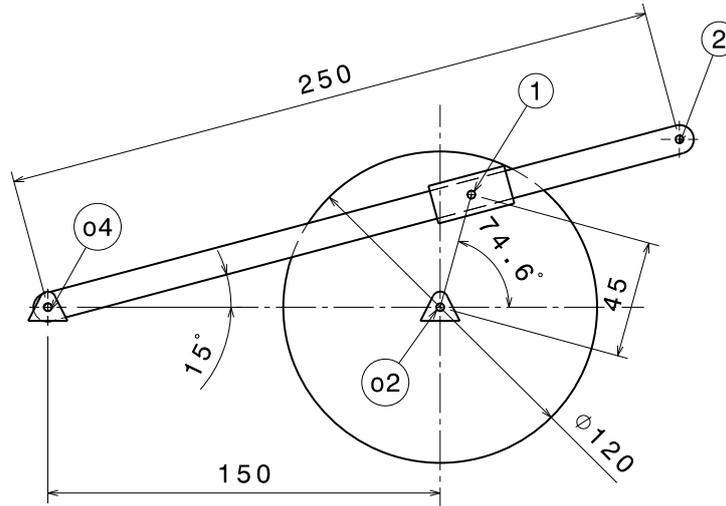


Figura 3.9

Datos: Todas las cotas están en milímetros.

Ver también: Solución por métodos numéricos en §4.8.

### Solución

Usaremos un sistema de coordenadas XY con origen en el centro del disco ( $O_2$ ).

Como conocemos la velocidad angular con la que gira el disco podemos calcular la velocidad lineal de cualquiera de sus puntos. Debemos por tanto encontrar un punto de enlace entre el disco y la barra  $O_42$  para encontrar su velocidad instantánea de rotación alrededor de  $O_4$ , que evidentemente será distinta de la del disco.

La conexión es el punto 1, sobre el que definimos tres puntos físicos diferenciados:  $\vec{r}_{1D}$  (punto 1 sobre el disco),  $\vec{r}_{1B}$  (punto 1 sobre la barra), y  $\vec{r}_{1C}$  (punto 1 sobre el casquillo). Analizando la forma en que el casquillo se desliza sobre la barra mientras pivota sobre el disco, se ve claramente que  $\vec{r}_{1D}$  y  $\vec{r}_{1C}$  siempre estarán uno sobre el otro (tendrán las mismas coordenadas, velocidades y aceleraciones) mientras que  $\vec{r}_{1B}$  se puede mover con respecto a ellos únicamente en la dirección instantánea definida por la orientación de barra.

Una vez realizado este análisis podemos plantear un sistema de ecuaciones con la velocidad del punto 1 de la barra calculada por dos caminos:

- Punto 1 sobre la barra como punto del sólido rígido  $O_42$ :

$$\vec{v}_{1B} = \vec{v}_{O_4}^0 + \omega_{O_42} \hat{k} \times \vec{O}_4 \vec{1} \quad (3.30)$$

- Punto 1 sobre la barra como punto móvil con velocidad relativa al disco de módulo desconocido y orientación conocida de  $15^\circ$ :

$$\vec{v}_{1B} = \vec{v}_{O_2}^0 + \vec{\omega}_{O_21} \times \vec{O}_2 \vec{1} + v_{rel} (\cos 15^\circ \hat{i} + \sin 15^\circ \hat{j}) \quad (3.31)$$

Igualando ambas ecuaciones, ya que las dos velocidades deben ser las mismas al tratarse del mismo punto físico, obtenemos una ecuación vectorial en 2D que equivale a dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\omega_{O_4 2} \hat{\mathbf{k}} \times (161.95 \hat{\mathbf{i}} + 43.38 \hat{\mathbf{j}}) = (-9.42 \hat{\mathbf{k}}) \times (11.95 \hat{\mathbf{i}} + 43.38 \hat{\mathbf{j}}) + v_{rel} (0.966 \hat{\mathbf{i}} + 0.2588 \hat{\mathbf{j}}) \quad (3.32)$$

Despejando:

$$\begin{aligned} \omega_{O_4 2} &= -1.28 \text{ rad/s} = -73.34^\circ/\text{s} \\ v_{rel} &= -365.82 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

Con lo que podemos calcular la velocidad del punto 2 mediante la ecuación de la velocidad de un punto perteneciente a un sólido rígido:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_2 &= \vec{\mathbf{v}}_{O_4}^0 + \omega_{O_4 2} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{O}_4 \mathbf{2} \\ &= -1.28 \hat{\mathbf{k}} \times (250 \cos 15^\circ \hat{\mathbf{i}} + 250 \sin 15^\circ \hat{\mathbf{j}}) \\ &= 82.8221 \hat{\mathbf{i}} - 309.0963 \hat{\mathbf{j}} \text{ (mm/s)} = 320 \text{ (mm/s)} \angle -75^\circ \end{aligned} \quad (3.33)$$

## Parte II

# Cinemática: métodos numéricos

## CAPÍTULO 4

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Contents

---

4.1. Bloques en dos correderas . . . . .	41
4.2. Ejemplo modelado . . . . .	46
4.3. Cuadrilátero con motor en acoplador . . . . .	48
4.4. Modelado: retorno rápido . . . . .	51
4.5. Mecanismo de cuatro barras: posición inicial . . . . .	54
4.6. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1]) . . . . .	56
4.7. Problema cilindro neumático . . . . .	59
4.8. Examen Feb-2014 . . . . .	61

---

## 4.1. Bloques en dos correderas

Las correderas  $A$  y  $B$  de la figura 4.1 están obligadas a moverse por sendas guías vertical y horizontal, respectivamente, y están conectadas por una barra rígida de longitud  $d = 15m$ . En un instante,  $\theta = 35^\circ$  y la corredera  $A$  se mueve hacia abajo con una velocidad vertical de  $10m/s$  y aceleración (también hacia abajo) de  $5m/s^2$ . Se pide:

- Modelar el problema en coordenadas naturales, más una coordenada angular relativa para la orientación de la barra rígida ( $\theta$  en el dibujo).
- Obtener la expresión del Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ .
- Determinar la velocidad angular de la barra.
- Obtener  $\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}$ , la derivada temporal del Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ .
- Determinar la aceleración angular de la barra y la aceleración del bloque  $B$ .

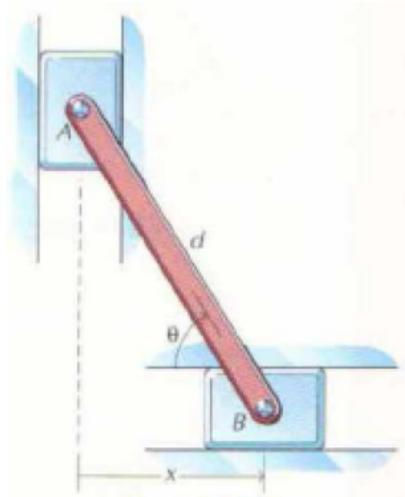


Figura 4.1: Dos correderas unidas por una barra rígida.

### Solución

#### a) Modelado.

Utilizando el punto de intersección de las dos correderas como origen de coordenadas, definimos los coordenadas naturales de los dos puntos  $A$  y  $B$  como  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$ , respectivamente. Podríamos introducir las cuatro coordenadas en el vector  $\mathbf{q}$ , pero ya que en este problema es obvio que  $x_A$  y  $y_B$  serán siempre cero, podemos dejar estas dos como coordenadas fijas y sacarlas de  $\mathbf{q}$ <sup>1</sup>. Añadiendo la coordenada relativa angular pedida, tenemos el vector de coordenadas generalizadas que modela el mecanismo:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_B \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>También sería correcto introducir las cuatro coordenadas, si simultáneamente introducimos las dos ecuaciones de restricción extra  $x_A = 0$  y  $y_B = 0$  en sendas filas de  $\Phi(\mathbf{q})$ .

Ya que tenemos más coordenadas ( $n = 3$ ) que g.d.l. tiene el mecanismo ( $g = 1$ ), estamos en un caso de modelado con *coordenadas dependientes*, lo que obliga a definir las ecuaciones de restricción para completar el modelado del mecanismo.

Necesitamos  $m = n - g = 3 - 1 = 2$  ecuaciones de restricción. La primera viene de la condición de sólido rígido de la barra:

$$\Phi_1(\mathbf{q}) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - d^2 \quad (4.2)$$

y la segunda es necesaria por la introducción de la coordenada relativa  $\theta$ . Ya que no es necesario modelar el mecanismo en posiciones donde  $\theta$  se acerque a los valores numéricamente problemáticos ( $0^\circ, 180^\circ, \pm 90^\circ$ ) nos basta con introducir una de las dos ecuaciones posibles vistas en clase; por ejemplo, la del coseno:

$$\Phi_2(\mathbf{q}) = x_B - x_A - d \cos \theta \quad (4.3)$$

Es decir, el vector de restricciones queda:

$$\Phi = \begin{bmatrix} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - d^2 \\ x_B - x_A - d \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### b) Obtener la expresión del Jacobiano $\Phi_{\mathbf{q}}$ .

Derivando cada componente de  $\Phi(\mathbf{q})$  (filas) con respecto a cada coordenada generalizada (columnas), obtenemos:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{matrix} & y_A & x_B & \theta \\ \Phi_1 & -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 0 \\ \Phi_2 & 0 & 1 & d \sin \theta \end{matrix} \quad (4.5)$$

#### c) Determinar la velocidad angular de la barra.

Se trata de resolver un problema de velocidad, para lo que antes deberíamos haber resuelto el problema de posición. En este caso ya nos dan todos los datos en el enunciado del problema, por lo que solamente aplicando trigonometría obtenemos el valor numérico de las coordenadas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_B \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \sin(35^\circ) \\ 15 \cos(35^\circ) \\ 35^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La ecuación del problema de velocidad es:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t \quad (4.7)$$

Ya que el tiempo no aparece explícitamente en el vector de restricciones, la derivada parcial  $\Phi_t$  es cero en este caso, quedando:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Reemplazando los valores del Jacobiano, vemos que se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, por lo que tiene infinitas soluciones, lo que siempre ocurrirá en mecanismos con uno o más grados de libertad. Debemos añadir tantas

ecuaciones extra como datos de velocidad conocidos tengamos; en este caso, hay que introducir una tercera fila imponiendo  $\dot{y}_A = -10(m/s)$ , quedando:

$$\begin{bmatrix} -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 0 \\ 0 & 1 & d \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

que reemplazando datos numéricos conocidos queda:

$$\begin{bmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 30 \cos(35^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 15 \sin(35^\circ) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Un sistema de ecuaciones lineales como éste se puede resolver, por ejemplo, por los métodos de Gauss o de Cramer. Aunque en este caso se pueden ir despejando variables una a una y sustituir fácilmente, seguiremos el método de Cramer a modo de ejemplo; despejamos primero el valor de la velocidad angular de la barra:

$$\dot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 30 \cos(35^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 30 \cos(35^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 15 \sin(35^\circ) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-300 \sin(35^\circ)}{30 \cdot 15 \cdot \cos(35^\circ) \sin(35^\circ)} = -0.8138 \text{ (rad/s)} \quad (4.11)$$

donde el signo negativo quiere decir que la rotación va en sentido contrario a cómo se ha definido  $\theta$  (ver figura del enunciado), por lo que el giro tiene realmente *sentido antihorario*.

Igualmente podemos calcular la velocidad horizontal de la corredera  $B$ :

$$\dot{x}_B = \frac{\begin{vmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \sin(35^\circ) \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 30 \cos(35^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 15 \sin(35^\circ) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{10 \cdot 30 \cdot 15 \sin^2(35^\circ)}{30 \cdot 15 \cdot \cos(35^\circ) \sin(35^\circ)} = 7.002 \text{ (m/s)} \quad (4.12)$$

#### d) Obtener $\dot{\Phi}_q$ , la derivada temporal del Jacobiano $\Phi_q$ .

Derivar una matriz con respecto al tiempo consiste en derivar cada uno de sus elementos individualmente. Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -2(y_B - y_A) & 2(x_B - x_A) & 0 \\ 0 & 1 & d \sin(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2(\dot{y}_B - \dot{y}_A) & 2(\dot{x}_B - \dot{x}_A) & 0 \\ 0 & 0 & d \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\dot{y}_A & 2\dot{x}_B & 0 \\ 0 & 0 & d \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Podemos calcular el valor de esta matriz para el instante de interés sustituyendo todas las variables que aparecen, ya conocidas:

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \approx \begin{bmatrix} -20 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

e) **Determinar la aceleración angular de la barra y la aceleración del bloque B.**

Debemos plantear la ecuación del problema de aceleración:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_t \tag{4.15}$$

El término  $\dot{\Phi}_t$  es cero en este problema, porque  $\Phi_t$  ya es cero, como vimos antes. El valor de  $\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}$  ya se obtuvo en la eq. 4.14, y el vector de velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  también es conocido, así que podemos evaluar su producto:

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -20 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 7.002 \\ -0.8138 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 298.06 \\ 8.138 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Al igual que en el problema de velocidades, la eq. 4.15 es un sistema lineal de dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que debemos conocer un valor de aceleración para despejar el resto. En este caso, se tiene que  $\ddot{y}_A = -5$  ( $m/s^2$ ), por lo que planteamos:

$$\begin{bmatrix} 30 \sin(35^\circ) & 30 \cos(35^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 15 \sin(35^\circ) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{x}_B \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -298.06 \\ -8.138 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

que podemos resolver por cualquier método conocido. Por ejemplo, empleando MATLAB:

```

>> [30*sind(35), 30*cosd(35), 0;...
    0, 1, 15*sind(35);...
    1, 0,0] \ [-298.06; -8.138; -5]

```

```
ans =
```

```
-5.0000
```

```
-8.6278
```

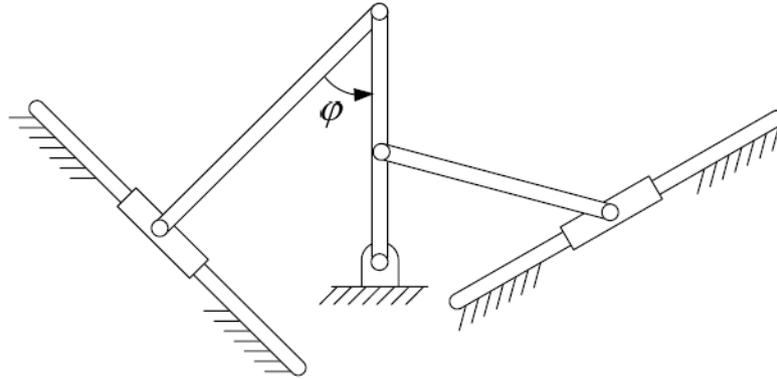
```
0.0569
```

es decir:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_B &= -8.63 \text{ (m/s}^2\text{)} \\ \ddot{\theta} &= 0.057 \text{ (rad/s}^2\text{)}\end{aligned}\tag{4.18}$$

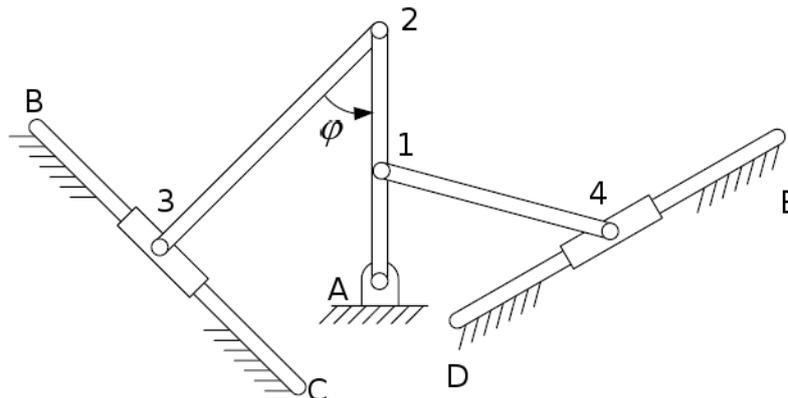
## 4.2. Ejemplo modelado

Modelizar con coordenadas naturales, incluyendo además el ángulo  $\varphi$  indicado en la figura. Escribir las ecuaciones de restricción que se consideren necesarias.



### Solución

Marcamos los puntos de interés, siguiendo las reglas estudiadas en teoría:



por lo que el vector de coordenadas generalizadas queda:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ \varphi]^T \quad (4.19)$$

Tenemos  $n = 9$  coordenadas, y como se trata de un mecanismo con  $g = 1$  grados de libertad (comprobarlo se deja como ejercicio), debemos establecer  $m = n - g = 9 - 1 = 8$  ecuaciones de restricción. Siguiendo las normas de modelado de coordenadas naturales, tenemos:

- Sólido A12: Es un sólido rígido con tres puntos. Da lugar a tres restricciones, una de distancia constante  $\vec{\mathbf{A}}\mathbf{2}$  y otras dos por la proporcionalidad  $\vec{\mathbf{A}}\mathbf{1} = k\vec{\mathbf{A}}\mathbf{2}$ :

$$(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{A2}^2 = 0 \quad (4.20)$$

$$(x_2 - x_A) - \frac{L_{A2}}{L_{A1}}(x_1 - x_A) = 0 \quad (4.21)$$

$$(y_2 - y_A) - \frac{L_{A2}}{L_{A1}}(y_1 - y_A) = 0 \quad (4.22)$$

- Sólido 23: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (4.23)$$

- Sólido 14: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - L_{14}^2 = 0 \quad (4.24)$$

- Par prismático 3-tierra: Propiedad de colinealidad,  $\vec{\mathbf{C3}} \times \vec{\mathbf{CB}} = 0$ .

$$(x_3 - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_3 - y_C) = 0 \quad (4.25)$$

- Par prismático 4-tierra: Propiedad de colinealidad,  $\vec{\mathbf{D4}} \times \vec{\mathbf{DE}} = 0$ .

$$(x_4 - x_D)(y_E - y_D) - (x_E - x_D)(y_4 - y_D) = 0 \quad (4.26)$$

- Coordenada relativa  $\varphi$ : Podemos emplear, por ejemplo,  $\vec{\mathbf{A2}} \cdot \vec{\mathbf{23}} = L_{A2}L_{23} \cos \varphi$

$$(x_2 - x_A)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_A)(y_3 - y_2) - L_{A2}L_{23} \cos \varphi = 0 \quad (4.27)$$

Resultando:

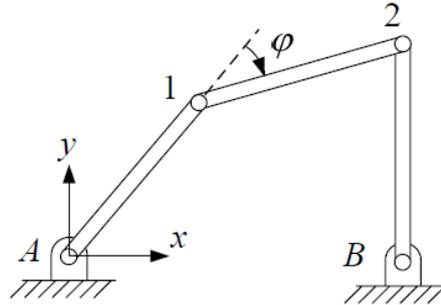
$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{A2}^2 \\ (x_2 - x_A) - \frac{L_{A1}}{L_{A2}}(x_1 - x_A) \\ (y_2 - y_A) - \frac{L_{A1}}{L_{A2}}(y_1 - y_A) \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 \\ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - L_{14}^2 \\ (x_3 - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_3 - y_C) \\ (x_4 - x_D)(y_E - y_D) - (x_E - x_D)(y_4 - y_D) \\ (x_2 - x_A)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_A)(y_3 - y_2) - L_{A2}L_{23} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### 4.3. Cuadrilátero con motor en acoplador

Para el cuadrilátero de la siguiente figura, se pide:

- Modelizar en coordenadas mixtas. Debe incluirse el ángulo  $\varphi$ .
- Resolver el problema instantáneo de velocidades, cuando  $\dot{\varphi} = 1 \text{ rad/s}$ .

Datos:  $x_A = 0, y_A = 0, x_B = 7, y_B = 0, x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = 7, y_2 = 5$ .



#### Solución

El vector de coordenadas generalizadas quedaría:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \varphi]^\top \quad (4.29)$$

Con  $n = 5$  coordenadas, y con  $g = 1$  grados de libertad, necesitamos  $m = n - g = 5 - 1 = 4$  ecuaciones de restricción:

- Sólido A1: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 = 0 \quad (4.30)$$

- Sólido 12: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.31)$$

- Sólido 2B: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 - L_{B2}^2 = 0 \quad (4.32)$$

- Coordenada relativa  $\varphi$ : Podemos emplear, por ejemplo,  $\vec{\mathbf{A1}} \cdot \vec{\mathbf{12}} = L_{A1}L_{12} \cos \varphi$ , por ser estar  $\varphi$  alejado de  $0^\circ$  (valor donde el coseno daría problemas):

$$(x_1 - x_A)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_A)(y_2 - y_1) - L_{A1}L_{12} \cos \varphi = 0 \quad (4.33)$$

Resultando el vector de restricciones:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 \\ (x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 - L_{B2}^2 \\ (x_1 - x_A)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_A)(y_2 - y_1) - L_{A1}L_{12} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Antes de proceder con el problema de velocidades, necesitamos tener todas las coordenadas. Como solamente nos falta  $\varphi$ , podemos despejar su valor a partir de la última ecuación de restricción, sin tener que resolver el problema de posición al completo:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_A)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_A)(y_2 - y_1) - L_{A1}L_{12} \cos \varphi &= 0 \\ \rightarrow 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 5\sqrt{17} \cos \varphi &= 0 \\ \rightarrow \varphi &= 39.094^\circ\end{aligned}\quad (4.35)$$

con lo que:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 39.094^\circ \end{bmatrix}\quad (4.36)$$

Planteamos el Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ , que necesitamos para el problema de velocidades:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(x_B - x_2) & -2(y_B - y_2) & 0 \\ x_2 - 2x_1 + x_A & y_2 - 2y_1 + y_A & x_1 - x_A & y_1 - y_A & L_{A1}L_{12} \sin \varphi \end{bmatrix}\quad (4.37)$$

Reemplazando los valores numéricos que tenemos en este problema:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 4 & 13 \end{bmatrix}\quad (4.38)$$

Con lo que podemos plantear el problema de velocidades:

$$\Phi_Q(\mathbf{q})\mathbf{q} = -\overset{0}{\Phi_t}\quad (4.39)$$

forzando a que el grado de libertad  $\varphi$  tenga una velocidad dada ( $\dot{\varphi} = 1 \text{ rad/s}$ ):

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 4 & 13 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (4.40)$$

de donde podemos despejar el valor del resto de velocidades:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2.2857 \text{ (m/s)} \\ \dot{y}_1 &= 1.7143 \text{ (m/s)} \\ \dot{x}_2 &= -1.8571 \text{ (m/s)} \\ \dot{y}_2 &= 0 \text{ (m/s)}\end{aligned}\tag{4.41}$$

#### 4.4. Modelado: retorno rápido

La Figura 4.2 representa un mecanismo de retorno rápido como el empleado en máquinas cepilladoras. Se pide:

- Modelarlo en coordenadas mixtas (naturales y relativas), incluyendo el ángulo de la manivela de entrada como coordenada angular relativa.
- Obtener la expresión del Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ .

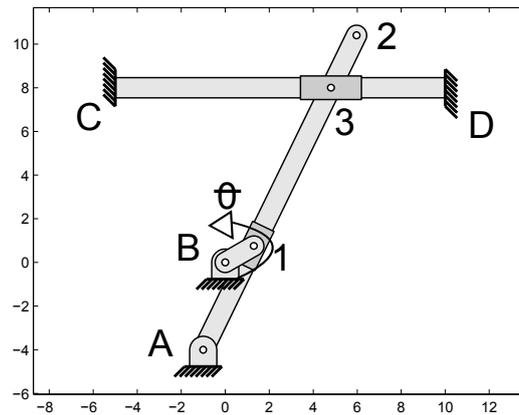


Figura 4.2: Mecanismo de retorno rápido.

#### Solución

El vector de coordenadas generalizadas quedaría:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ \theta]^T \quad (4.42)$$

Con  $n = 7$  coordenadas, y con  $g = 1$  grados de libertad, necesitamos  $m = n - g = 7 - 1 = 6$  ecuaciones de restricción:

- Condición de sólido rígido de las barras  $B1$  y  $A2$ :

$$(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 - L_{B1}^2 = 0 \quad (4.43)$$

$$(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{A2}^2 = 0 \quad (4.44)$$

- Restricciones de alineamiento. La primera se puede obtener mediante semejanza entre el triángulo formado por los segmentos  $x_1 - x_A, y_1 - y_A$  y el formado por  $x_2 - x_A, y_2 - y_A$ :

$$(x_1 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_1 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (4.45)$$

La segunda se puede obtener mediante semejanza entre el triángulo formado por los segmentos  $x_3 - x_A, y_3 - y_A$  y el formado por  $x_2 - x_A, y_2 - y_A$ :

$$(x_3 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_3 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (4.46)$$

Si nos fijamos bien, la tercera ecuación de alineamiento viene determinada por la imposición de que el punto 3 sólo pueda moverse horizontalmente. Esto equivaldría a eliminar la coordenada  $y_3$  del vector de coordenadas generalizadas, ya que ésta no varía en el tiempo. No obstante, para mantener el carácter generalista del método, procedemos igual que para las dos deslizaderas anteriores. Por tanto, se puede obtener mediante semejanza entre los triángulos (ficticios) formados por los segmentos  $x_3 - x_C, y_3 - y_C$  y  $x_D - x_C, y_D - y_C$ :

$$(x_3 - x_C)(y_D - y_C) - (y_3 - y_C)(x_D - x_C) = 0 \quad (4.47)$$

- Ecuaciones de ángulo. Ya disponemos de la información suficiente para determinar la posición del mecanismo completo para un conjunto de coordenadas generalizadas que satisfagan las ecuaciones de restricción. No obstante, y como se ha visto en otros problemas, suele ser conveniente introducir una coordenada de ángulo que nos permita modelar cómo se aplicaría movimiento al mecanismo. Recordemos que en la mayoría de aplicaciones mecánicas esto se consigue por medio de los ejes de salida de motores. Por tanto, introducimos dos ecuaciones de restricción, de modo que en las posiciones de la manivela próximas a la horizontal no haya problemas con la utilización del coseno, ni en la vertical con el seno:

$$(x_1 - x_B) - L_{B1} \cos \theta = 0 \quad (4.48)$$

$$(y_1 - x_B) - L_{B1} \sin \theta = 0 \quad (4.49)$$

Resultando el vector de restricciones:

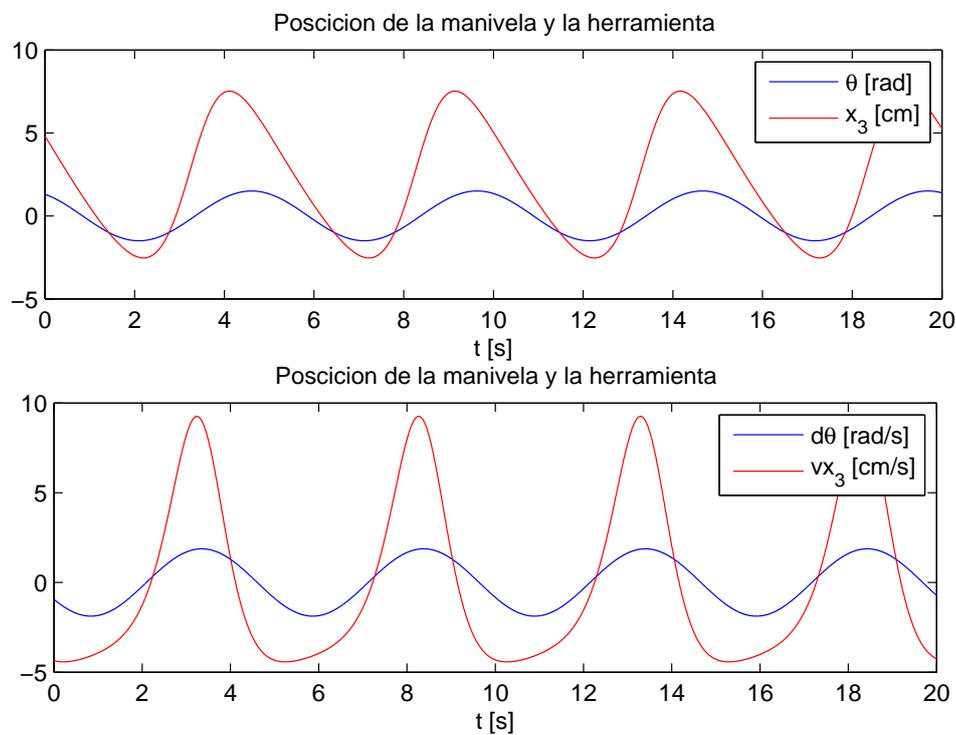
$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 - L_{B1}^2 \\ (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{A2}^2 \\ (x_1 - x_A)(y_2 - y_A) + (y_1 - y_A)(x_2 - x_A) \\ (x_3 - x_A)(y_2 - y_A) + (y_3 - y_A)(x_2 - x_A) \\ (x_3 - x_C)(y_D - y_C) + (y_3 - y_C)(x_D - x_C) \\ (x_1 - x_B) - L_{B1} \cos \theta \\ (y_1 - x_B) - L_{B1} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Fíjese que realmente existen 6 restricciones únicas aunque el vector contenga 7 restricciones, al ser las dos últimas (ángulo  $\theta$ ) redundantes con la primera (distancia  $B1$  constante). Se mantiene por tanto que  $g = n - m = 7 - 6 = 1$ , donde  $m$  estrictamente representa el número de restricciones *no redundantes*, valor que se puede obtener numéricamente como el rango de  $\Phi_{\mathbf{q}}$ .

Derivando este vector con respecto a cada una de las coordenadas utilizadas obtenemos el Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ :

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_B) & 2(y_1 - y_B) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_A) & 2(y_2 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ (y_2 - y_A) & -(x_2 - x_A) & (y_1 - y_A) & (x_1 - x_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (y_D - y_C) & (x_D - x_C) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{B1} \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_{B1} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Para ilustrar el movimiento que describirían la manivela y el punto de anclaje de la herramienta en una máquina de este tipo se han utilizado estas ecuaciones para generar la siguiente gráfica:



**Figura 4.3:** Resultados de posición y velocidad para mecanismo de retorno rápido.

## 4.5. Mecanismo de cuatro barras: posición inicial

La Figura 4.4 representa el proceso iterativo de resolución del problema de posición inicial de un mecanismo de cuatro barras.

La manivela (barra izquierda) tiene una longitud  $L_{A1} = 2m$ , la biela (barra central)  $L_{12} = 8m$ , y el balancín (barra derecha)  $L_{2B} = 5m$ . La distancia entre centros fijos es de  $L_{AB} = 10m$ . La coordenada relativa de ángulo es considerada como el grado de libertad, y se corresponde con el ángulo que forma la manivela con la horizontal.

Se parte de una aproximación inicial  $\mathbf{q}_0 = [1.5 \ 1 \ 8 \ 4 \ \frac{\pi}{3}]^T$ , y en la primera iteración se obtiene una aproximación  $\mathbf{q}_1 = [1 \ 2.125 \ x_2 \ y_2 \ \frac{\pi}{3}]^T$ . Calcular las coordenadas  $x_2$  e  $y_2$  de esta primera iteración.

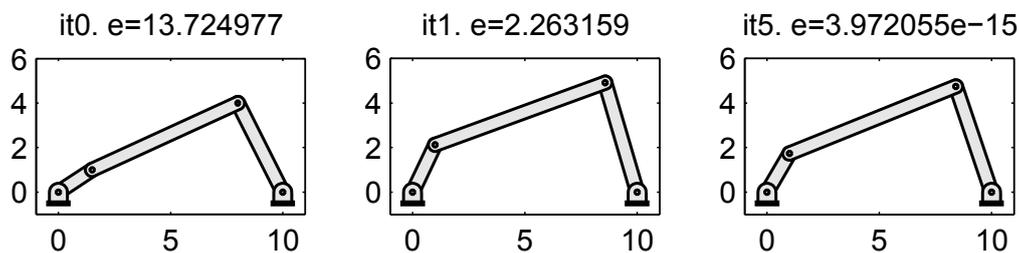


Figura 4.4: Sucesivas iteraciones del problema de posición.

### Solución

El vector de coordenadas generalizadas quedaría:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta]^T \quad (4.52)$$

Con  $n = 5$  coordenadas, y con  $g = 1$  grados de libertad, necesitamos  $m = n - g = 5 - 1 = 4$  ecuaciones de restricción:

- Sólido A1: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 = 0 \quad (4.53)$$

- Sólido 12: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.54)$$

- Sólido 2B: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 - L_{B2}^2 = 0 \quad (4.55)$$

- Coordenada relativa  $\theta$ : Podemos emplear, por ejemplo una ecuación en términos del  $\cos \theta$ , ya que el valor de  $\theta$  se encuentra alejado de  $0^\circ$  (valor donde el coseno daría problemas):

$$(x_1 - x_A) - L_{A1} \cos \theta = 0 \quad (4.56)$$

Resultando el vector de restricciones:

$$\Phi = \begin{bmatrix} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 \\ (x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 - L_{B2}^2 \\ (x_1 - x_A) - L_{A1} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

y el correspondiente Jacobiano:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(x_B - x_2) & -2(y_B - y_2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_{A1} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Ahora aplicamos el sistema de ecuaciones que establece el problema de posición inicial:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\Phi(\mathbf{q}, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Para la primera iteración tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2({}^0x_1 - x_A) & 2({}^0y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2({}^0x_2 - {}^0x_1) & -2({}^0y_2 - {}^0y_1) & 2({}^0x_2 - {}^0x_1) & 2({}^0y_2 - {}^0y_1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(x_B - {}^0x_2) & -2(y_B - {}^0y_2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_{A1} \sin({}^0\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1x_1 - {}^0x_1 \\ {}^1y_1 - {}^0y_1 \\ {}^1x_2 - {}^0x_2 \\ {}^1y_2 - {}^0y_2 \\ {}^1\theta - {}^0\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^0x_1 - x_A)^2 + ({}^0y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 \\ ({}^0x_2 - {}^0x_1)^2 + ({}^0y_2 - {}^0y_1)^2 - L_{12}^2 \\ (x_B - {}^0x_2)^2 + (y_B - {}^0y_2)^2 - L_{B2}^2 \\ ({}^0x_1 - x_A) - L_{A1} \cos({}^0\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores correspondientes y operando llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$13x_2 + 6y_2 - 513/4 = 0 \quad (4.60)$$

$$8y_2 - 4x_2 = 0 \quad (4.61)$$

de donde obtenemos la solución:

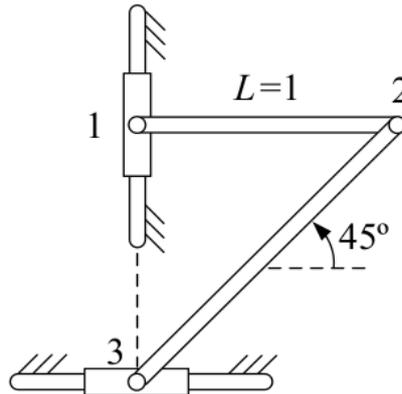
$$x_2 = 8.5781$$

$$y_2 = 4.9141$$

### 4.6. Doble deslizadera con dos barras (problema 4.3 de [1])

Dado el mecanismo de la siguiente figura, se pide:

- Número de grados de libertad del mecanismo.
- Hallar velocidad y aceleración instantáneas del punto 2. Datos:  $\dot{y}_1 = \dot{x}_3 = 1\text{ m/s}$ ,  $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_3 = 1\text{ m/s}^2$ .



#### Solución

- Número de grados de libertad del mecanismo.

Empleando el criterio de Grüebler, obtenemos:

$$g = 3(N - 1) - 2p_I - p_{II} = 3(3 - 1) - 2 \cdot 1 - 2 = 2$$

- Hallar velocidad y aceleración instantáneas del punto 2.

Comenzamos modelando el mecanismo en coordenadas naturales, mediante las coordenadas cartesianas de los puntos 1, 2 y 3. Aprovechando que las correderas en 1 y 3 tendrán siempre una de sus coordenadas constantes por imposición cinemática, definimos el vector  $\mathbf{q}$  con el mínimo número de coordenadas posibles, solamente las que variarán durante el movimiento del sistema:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

que, tomando como origen de coordenadas la posición inicial de 3, valen para el instante mostrado:

$$\mathbf{q}|_{t=0} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Con  $n = 4$  coordenadas, y  $g = 2$  grados de libertad, necesitamos por tanto  $m = n - g = 4 - 2 = 2$  ecuaciones de restricción:

- Sólido 12: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (4.64)$$

- Sólido 23: Sólido rígido con dos puntos:

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (4.65)$$

El orden en que aparecen los puntos dentro de los paréntesis no es importante, por lo que se puede escoger el que se prefiera. Eso sí, se debe tener cuidado y mantenerlos durante el cálculo de la matriz Jacobiana más adelante.

Sustituyendo ahora los valores que serán siempre fijos en todas las posiciones del mecanismo, tenemos el siguiente vector de restricciones:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_2^2 + (y_2 - y_1)^2 - 1 \\ (x_2 - x_3)^2 + y_2^2 - 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (4.66)$$

El problema de velocidad implica plantear  $\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t$ . Como  $t$  no aparece explícitamente en las restricciones, tenemos que  $\Phi_t = 0$ . Respecto al Jacobiano  $\Phi_{\mathbf{q}}$ , derivando hallamos su expresión:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{matrix} & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 \\ \Phi_1 & \left[ \begin{array}{cccc} -2(y_2 - y_1) & 2x_2 & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ \Phi_2 & \begin{array}{cccc} 0 & 2(x_2 - x_3) & 2y_2 & -2(x_2 - x_3) \end{array} \end{array} \right]_{2 \times 4} \end{matrix} \quad (4.67)$$

Reemplazando valores conocidos en el instante inicial:

$$\Phi(\mathbf{q})|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Planteamos ahora el sistema de ecuaciones ampliado consistente en las restricciones de velocidad impuestas por el mecanismo  $\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = 0$  y los datos de velocidad conocidos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

de donde se tienen las velocidades buscadas:  $\dot{x}_2 = 0$  y  $\dot{y}_2 = 1$ . Es decir, el punto 2 se mueve con velocidad vertical, en sentido de abajo a arriba, a 1 m/s. Podemos resumir todas las velocidades en el instante inicial a través del vector:

$$\dot{\mathbf{q}}|_{t=0} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (m/s) \quad (4.70)$$

Con respecto a las aceleraciones, debemos plantear las restricciones cinemáticas, que como vimos en teoría se resumen en el sistema de ecuaciones  $\Phi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_t$ . Como  $\Phi_t$  era cero, su derivada total con respecto al tiempo  $\dot{\Phi}_t$  sigue siendo cero. El término  $\dot{\Phi}$  representa la derivada temporal del Jacobiano, que obtenemos a partir de la Ec. (4.67):

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{q}) = \begin{matrix} & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 \\ \Phi_1 & \left[ \begin{array}{cccc} -2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) & 2\dot{x}_2 & 2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) & 0 \\ \Phi_2 & \begin{array}{cccc} 0 & 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) & 2\dot{y}_2 & -2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \end{array} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.71)$$

Particularizando con los valores numéricos de este caso, podemos calcular el resultado del producto  $\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$ , término que aparece en la derecha de la ecuación de aceleraciones, resultando:

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

tras lo que podemos plantear el sistema de ecuaciones ampliado de aceleraciones, introduciendo los dos datos de aceleraciones conocidas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

que despejando nos arroja unos valores de aceleración de  $\ddot{x}_2 = 0$  ( $m/s^2$ ) y  $\ddot{y}_2 = -1$  ( $m/s^2$ ).

Nota: Contrastar con la resolución analítica dada en §3.3.

## 4.7. Problema cilindro neumático

Determinar la velocidad angular instantánea  $\omega_1$  del mecanismo de la Figura 4.5 sabiendo que el actuador hidráulico se alarga con velocidad lineal  $v = 1\text{ m/s}$ .

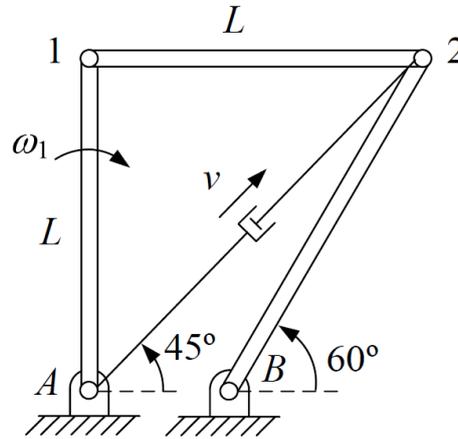


Figura 4.5: Ejemplo de mecanismo con actuador lineal

### Solución

Para obtener la velocidad solicitada basta con llevar a cabo un problema de velocidad para el instante objeto de estudio.

Para ello establecemos un sistema de coordenadas naturales que además establezcan alguna relación con el dato de entrada, que en este caso se corresponde con la velocidad lineal del actuador. Por tanto tendríamos un vector de coordenadas  $\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ s]^T$ . Aunque no es necesaria su evaluación, planteamos las ecuaciones de restricción ya que nos hará falta el Jacobiano, que se obtiene a partir de ellas:

$$\Phi = \begin{bmatrix} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 \\ (x_B - x_2)^2 + (y_B - y_2)^2 - L_{B2}^2 \\ x_2^2 + y_2^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

En este caso se ha definido la coordenada lineal  $s$  mediante una distancia al cuadrado por poder definirse como la longitud total de la “barra” que va desde  $A$  hasta  $2$ . Es importante resaltar que en otros problemas puede resultar más sencillo definir coordenadas lineales mediante polinomios de primer orden, de derivadas más sencillas que los de segundo orden.

Derivando ahora con respecto a las cinco variables, obtenemos la siguiente matriz Jacobiana:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(x_B - x_2) & -2(y_B - y_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & -2s \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

El problema de velocidad establece que el producto de la matriz Jacobiana por el vector de velocidades menos debe de ser igual 0, ya que el tiempo no aparece explícitamente en el vector de restricciones, la derivada parcial  $\Phi_t$  es cero en este caso, quedando:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.76)$$

Esto implica la resolución de un sistema de  $m = 4$  ecuaciones con  $n = 5$  incógnitas. Puesto que falta una ecuación para que el sistema sea resoluble incorporamos el dato del grado libertad de  $1m/s$  de acuerdo con el enunciado.

$$\begin{bmatrix} 2(0 - 0) & 2(1 - 0) & 0 & 0 & 0 \\ -2(1 - 0) & -2(1 - 0) & 2(1 - 0) & 2(1 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(1 - (1 - 1/\tan(60^\circ))) & -2(1 - 0) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1) & 2(1) & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

De lo que se resulta el vector  $\dot{\mathbf{q}} = [3.3461 \ 0 \ 3.3461 \ -1.9318 \ 1]^T$ . Finalmente, la velocidad angular de la barra  $A1$  se puede obtener a partir de la conocida fórmula de cinemática analítica:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\omega}_{A1} \times \vec{\mathbf{L}}_{A1} \quad (4.78)$$

de donde  $|\vec{\mathbf{v}}_1| = |\vec{\omega}_{A1}|L_{A1}$  y por tanto podemos despejar:

$$|\omega_{A1}| = \frac{\dot{x}_1}{y_1} = \frac{3.3461}{L} \quad (\text{rad/s}) \quad (4.79)$$

donde  $L$  queda como parámetro (no se especifica en el enunciado), y siendo el sentido de giro acorde a la velocidad  $x_1$ , es decir, en sentido de las agujas del reloj.

Téngase en cuenta que este último paso podría haberse omitido si incluimos el ángulo  $\theta_1$  en el vector de coordenadas generalizadas, ya que nos habría permitido una lectura directa de dicha velocidad. Esto se consigue a costa de ampliar el tamaño del problema, y es el analista el que debe decidir qué opción elegir.

## 4.8. Examen Feb-2014

Dado el mecanismo de la figura, y sabiendo que el disco gira a velocidad constante de 90 rpm en sentido horario, se pide:

- Modelarlo por métodos numéricos mediante coordenadas naturales y las coordenadas relativas que se estimen necesarias para la realización del resto de apartados.
- Calcular la velocidad del punto extremo de la barra (punto 2) por métodos numéricos.

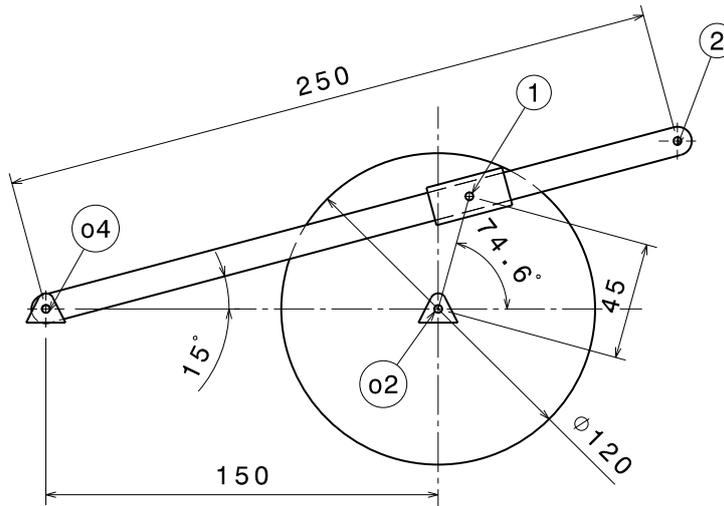


Figura 4.6

Datos: Todas las cotas están en milímetros.

Ver también: Solución por método analítico en §3.4.

### Solución

a) **Modelarlo por métodos numéricos mediante coordenadas naturales y las coordenadas relativas que se estimen necesarias para la realización del resto de apartados.**

Los puntos cuyas coordenadas aparecen en la cadena cinemática cerrada son los puntos fijos  $O_2$  y  $O_4$ , y el móvil 1. Debido a que el punto 1 sobre la barra  $O_42$  está sobre una corredera, necesitaremos un tercer punto sobre dicha barra para poder establecer posteriormente la condición de colinealidad. Por lo tanto, nos valdría cualquier otro punto de la barra pero ya que nos interesa el estado cinemático del punto 2, éste es otro punto que debe aparecer en el vector de coordenadas. En cuanto a coordenadas relativas, nos interesa definir el ángulo  $\theta_{O_2}$  entre el eje X y la línea  $O_21$ , ya que su derivada es la velocidad angular del disco, dato cinemático dado en el problema. Recopilando las coordenadas de los puntos móviles y esta coordenada relativa, tenemos:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_{O_2} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Situaremos el origen de coordenadas XY en el punto  $O_4$ , con lo que  $x_{O_4} = y_{O_4} = 0$ .

El modelado por coordenadas naturales o mixtas requiere además de la definición de las correspondientes ecuaciones de restricción. Empleando el criterio de Grüebler, obtenemos que los grados de libertad del mecanismo son:

$$g = 3(N - 1) - 2p_I - p_{II} = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

por lo que con  $n = 5$  coordenadas, necesitamos  $m = n - g = 5 - 1 = 4$  restricciones:

- Sólido  $O_42$ : Es un sólido rígido modelado con dos puntos,  $O_4$  y 2. Recordar que no se trata de un sólido de tres puntos al ser 1 un punto móvil (corredera). Por tanto, tenemos restricción de distancia constante  $O_42$ :

$$(x_2 - x_{O_4})^2 + (y_2 - y_{O_4})^2 - L_{O_42}^2 = 0 \quad (4.81)$$

$$x_2^2 + y_2^2 - L_{O_42}^2 = 0 \quad (4.82)$$

- Sólido  $O_21$ : Distancia constante entre  $O_2$  y el punto 1 sobre el disco:

$$(x_1 - x_{O_2})^2 + (y_1 - y_{O_2})^2 - L_{O_21}^2 = 0 \quad (4.83)$$

- Par prismático entre el punto 1 y la barra: Implica  $\mathbf{O}_4\mathbf{1} \times \mathbf{O}_4\mathbf{2} = 0$ :

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \quad (4.84)$$

- Coordenada relativa  $\theta_{O_2}$ : Ya que sólo se nos pide resolver el problema para una configuración concreta, no es necesario emplear las dos ecuaciones redundantes con seno y coseno, pudiendo emplear cualquiera de ellas:

$$x_1 - x_{O_2} - L_{O_21} \cos \theta_{O_2} = 0 \quad (4.85)$$

En resumen:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 - L_{O_42}^2 \\ (x_1 - x_{O_2})^2 + (y_1 - y_{O_2})^2 - L_{O_21}^2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \\ x_1 - x_{O_2} - L_{O_21} \cos \theta_{O_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.86)$$

El conjunto de las coordenadas  $\mathbf{q}$  y las restricciones conforman el modelo pedido.

### b) Calcular la velocidad del punto extremo de la barra (punto 2) por métodos numéricos.

Se trata de resolver un problema de velocidad, para lo que es un prerequisite haber resuelto el problema de posición. En este caso el enunciado nos da la posición del mecanismo, por lo que aplicando trigonometría obtenemos el valor numérico de las coordenadas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_{O_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 + 45 \cos 74.6^\circ \\ 45 \sin 74.6^\circ \\ 250 \cos 15^\circ \\ 250 \sin 15^\circ \\ 74.6^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161.95 \\ 43.384 \\ 241.482 \\ 64.705 \\ 1.302 \end{bmatrix} \quad (\text{mm, rad}) \quad (4.87)$$

La ecuación del problema de velocidad es  $\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t$ . Ya que en este caso no existen restricciones que dependan explícitamente del tiempo, tenemos  $\Phi_t = 0$ . Calculamos el Jacobiano derivando cada restricción con respecto a todas las coordenadas (muy importante respetar el orden de las ecuaciones y de las variables dentro del vector  $\mathbf{q}$ ):

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{matrix} & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \theta_{O2} \\ \Phi_1 & \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 0 \\ 2(x_1 - x_{O2}) & 2(y_1 - y_{O2}) & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & -x_2 & -y_1 & x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \sin \theta_{O2} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.88)$$

Sustituyendo los valores numéricos para el instante inicial:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \begin{matrix} & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \theta_{O2} \\ \Phi_1 & \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 482.9640 & 129.41 & 0 \\ 23.9 & 86.768 & 0 & 0 & 0 \\ 64.705 & -241.482 & -43.384 & 161.95 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 43.384 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.89)$$

Ya que el mecanismo tiene 1 grado de libertad, debemos plantear el sistema de ecuaciones ampliado que incluya  $\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = 0$  junto con 1 dato de velocidad conocido, en este caso,  $\dot{\theta}_{O2} = -90 \text{ rpm} = -9.42 \text{ (rad/s)}$  dado en el enunciado.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 482.9640 & 129.41 & 0 \\ 23.9 & 86.768 & 0 & 0 & 0 \\ 64.705 & -241.482 & -43.384 & 161.95 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 43.384 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_{O2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.42 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Resolviendo el sistema obtenemos las velocidades de todos los puntos del modelo:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t=0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_{O2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 408.68 \\ -112.57 \\ 82.79 \\ -308.96 \\ -9.42 \end{bmatrix} \quad (\text{mm/s y rad/s}) \quad (4.91)$$

con lo que la velocidad pedida del extremo 2 es de  $(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (82.79, -308.96) \text{ (mm/s)}$ , o lo que es lo mismo,  $320(\text{mm/s}) \angle -75^\circ$ , resultado idéntico al obtenido mediante el método analítico en §3.4.

## Parte III

# Dinámica numérica

# CAPÍTULO 5

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Contents

5.1. Examen Feb-2014 . . . . .	65
--------------------------------	----

### 5.1. Examen Feb-2014

Obtener la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas del mecanismo de la figura.

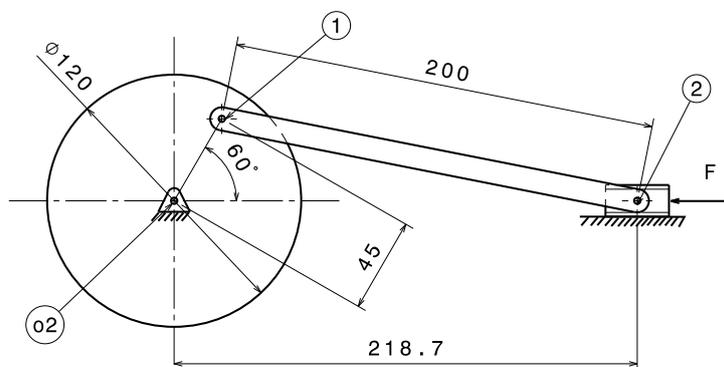


Figura 5.1

Datos: Todas las cotas están dadas en milímetros. Masa del disco: 10 kg, masa de barra: 1 kg, masa del casquillo: 0 kg, Fuerza  $F = 20N$ .

### Solución

Para obtener la matriz de masas primero debemos establecer el vector de coordenadas generalizadas del mecanismo, y a continuación ensamblar las matrices de masas de cada uno de los elementos.

Lo más sencillo es modelar mediante las siguientes coordenadas naturales:  $\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2]$ . Nótese cómo se ha dejado fuera la coordenada  $y_2$  por ser constante a lo largo del tiempo (el ejercicio también sería válido incluyéndola, aunque lógicamente la matriz de masas tendría una fila y una columna más).

Para determinar las matrices de masa de cada elemento, partimos de la matriz genérica para elementos planos definidos por dos puntos:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} M + a - 2b_x & 0 & b_x - a & -b_y \\ \sim & M + a - 2b_x & b_y & b_x - a \\ \sim & \sim & a & 0 \\ \sim & \sim & \sim & a \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde:

- $M$ : Masa total.  $a = \frac{I_i}{L_{ij}^2}$ ,  $b_x = M \frac{e x_g}{L_{ij}}$ ,  $b_y = M \frac{e y_g}{L_{ij}}$ .
- $I_i$ : Momento polar de inercia (sobre  $z$ ) en el punto  $i$ .
- $(e x_g, e y_g)$ : Coordenadas locales del centro de masas.

Concretando para cada elemento del problema:

- **Disco  $O_2$ 1:** Hay que ser muy cuidadosos con escoger los valores de momento polar de inercia que corresponda, según el centro del disco esté en el primer o el segundo punto usado para modelar el mecanismo. En este caso, asumimos que el orden de dos puntos del disco es  $(O_2, 1)$ , luego tenemos:
  - $L_{ij} = 45 \text{ mm}$ , la distancia entre los dos puntos  $O_2$  y 1.
  - $R = 60 \text{ mm}$ , el radio del disco físico. Es esta distancia la que influye en el cálculo del valor de la inercia  $I_i$ , y no  $L_{ij}$ .
  - $I_i = 1/2 MR^2 = 1800M \text{ mm}^2$ , el momento polar de inercia con respecto a  $O_2$ .
  - $a = \frac{I_i}{L_{ij}^2} = 0.8889M$ .
  - Al coincidir el centro de masas con el primer punto del sólido, tenemos  $b_x = 0$  y  $b_y = 0$ .

Sustituyendo en la matriz  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}_d = 10kg \cdot \begin{bmatrix} 1.8889 & 0 & -0.8889 & 0 \\ 0 & 1.8889 & 0 & -0.8889 \\ -0.8889 & 0 & 0.8889 & 0 \\ 0 & -0.8889 & 0 & 0.8889 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

- **Barra 12:** Sustituyendo, obtenemos:

$$\mathbf{M}_b = \frac{1kg}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

- **Casquillo en 2:** Al no tener masa, no aporta nada a la matriz de masas del mecanismo

El ensamblado de la matriz global presenta la siguiente estructura:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} O_2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{ccc} O_2 & 1 & 2 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_d^{O_2, O_2} & \mathbf{M}_d^{O_2, 1} & 0 \\ \mathbf{M}_d^{1, O_2} & \mathbf{M}_d^{1, 1} + \mathbf{M}_b^{1, 1} & \mathbf{M}_b^{1, 2} \\ 0 & \mathbf{M}_b^{2, 1} & \mathbf{M}_b^{2, 2} \end{array} \right] \end{array} \quad (5.4)$$

por lo que ensamblando cada submatriz en la matriz de masas del mecanismo completo y quedándonos sólo con las componentes que forman parte del vector de coordenadas  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & x_2 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 9.222 & 0 & 0.167 \\ 0 & 9.222 & 0 \\ 0.167 & 0 & 0.333 \end{array} \right] \end{array} \text{ (kg)} \quad (5.5)$$

En cuanto al vector de fuerzas generalizadas, debemos contar con la contribución de cada una de las fuerzas existentes:

- **Peso propio del disco:** Al estar su centro de masas en el apoyo a tierra, ninguna parte del peso se translada al resto del mecanismo:

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (x_1) \\ (y_1) \\ (x_2) \end{array} \text{ (N)} \quad (5.6)$$

- **Peso propio de la barra:** Empleando la fórmula estudiada en teoría, obtenemos:

$$\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 M_b g \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (x_1) \\ (y_1) \\ (x_2) \end{array} \text{ (N)} \quad (5.7)$$

- **Fuerza  $F$ :** Al ser una fuerza puntual, podemos aplicar las fórmulas vistas en teoría para una fuerza aplicada en una parte de un sólido rígido (la barra). Pero en este caso es aún más sencillo, al coincidir el punto de aplicación con un punto del modelo (el 2), trasladándose directamente el valor de la fuerza a su posición correspondiente:

$$\mathbf{Q}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (x_1) \\ (y_1) \\ (x_2) \end{array} \text{ (N)} \quad (5.8)$$

Sumando todos los efectos independientes obtenemos el vector de fuerzas generalizadas:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} (x_1) \\ (y_1) \\ (x_2) \end{matrix} \quad (\text{N}) \quad (5.9)$$

**Parte IV**

**Engranajes**

# CAPÍTULO 6

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Contents

6.1. Examen Feb-2014 . . . . .	70
6.2. Examen Sep-2014 . . . . .	71
6.3. Cálculo de velocidades en un tren compuesto . . . . .	75

### 6.1. Examen Feb-2014

El siguiente esquema se corresponde con un sistema de reparto de potencia de un vehículo híbrido. El motor-generator 2 (MG2) está conectado a la corona y es el encargado de propulsar al vehículo. La corona tiene  $Z_3 = 78$  dientes, mientras que el portasatélites, acoplado al motor de combustión interna (ICE), engrana con MG1 y MG2, permitiendo actuar en la propulsión del vehículo y cargar las baterías, dependiendo del caso. Por último, el engranaje sol está acoplado al motor-generator 1 (MG1) y tiene  $Z_1 = 30$  dientes.

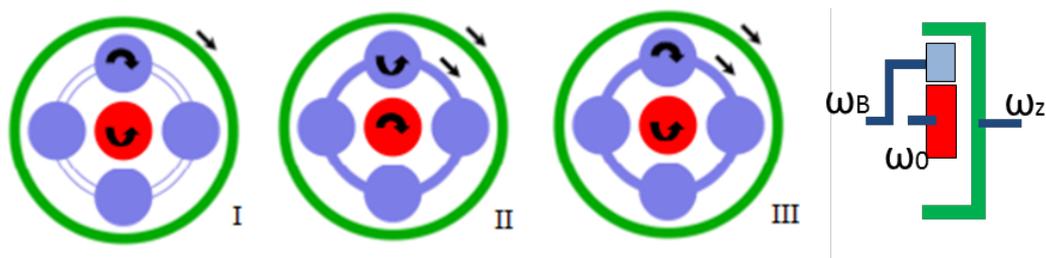


Figura 6.1

De acuerdo a las vistas en alzado del dibujo, se considerarán velocidades angulares positivas las que giren en sentido de las agujas del reloj. Se pide: determinar la velocidad del MG1 y su sentido de giro, en estos tres casos:

1. El motor de combustión está bloqueado. El vehículo inicia la marcha a la salida de un semáforo, funcionando en modo eléctrico puro con una velocidad del MG2 de 715 rpm.

2. MG2 gira a 2665 rpm y, dado que el vehículo necesita un extra de potencia, el motor de gasolina se pone a 3000 rpm.
3. El vehículo circula a velocidad constante, girando MG2 a 4290 rpm mientras que el motor de combustión trabaja en un punto de equilibrio cercano al óptimo, a 2185 rpm.

Tener en cuenta en todos los casos que las velocidades dadas tienen el sentido de giro indicado en el dibujo anterior.

### Solución

Caso 1: Sabiendo que el motor de combustión está bloqueado ( $\omega_B = 0$ ), y empleando la fórmula de Willis, obtenemos  $\omega_0 = -1859$  (rpm).

Caso 2: De nuevo aplicamos la fórmula de Willis obteniendo  $\omega_0 = 3871$  (rpm).

Caso 3: En este caso se obtiene  $\omega_0 = -3288$  (rpm).

## 6.2. Examen Sep-2014

En una aplicación industrial se desea conseguir, con ruedas cilíndricas rectas, una relación de transmisión  $i=221/1005$ .

Se pide:

1. Calcular el número de dientes de cada rueda para obtener la relación de transmisión dada con un tren de engranajes ordinario. Especificar la disposición de las ruedas y la condición que deben cumplir para que el tren sea recurrente.
2. Obtener la relación de transmisión dada con un tren de engranajes epicicloidales de balancín. Dibujarlo y especificar el número de dientes de cada rueda.
3. Calcular la relación de transmisión necesaria para obtener, con una pareja de ruedas de las disponibles, un error absoluto menor de 0,0001 respecto a la dada. (Tomar una precisión de 8 decimales).

Debido a condiciones de diseño, se tienen las siguientes restricciones:

- La relación de transmisión de cada engranaje no puede sobrepasar el valor de 5.
- El número máximo de dientes por rueda será de  $Z_{max} = 100$  y el número mínimo de  $Z_{min} = 10$  ( $10 \leq Z \leq 100$ )

### Solución

#### Apartado 1

Para hallar una posible disposición de un tren ordinario que cumpla la relación de transmisión pedida ( $i=221/1005$ ), se descomponen el numerador y el denominador:

$$i = \frac{221}{1005} = \frac{13 \cdot 17}{3 \cdot 5 \cdot 67} = \frac{17}{67} \cdot \frac{13}{15} \quad (6.1)$$

Una posible solución sería:

$$Z_1 = 17, Z_2 = 67, Z_3 = 13, Z_4 = 15$$

Para que el tren ordinario sea recurrente se tiene que cumplir que la distancia entre los dos ejes en cada engranaje sea igual:

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 \quad (6.2)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} \cdot (Z_1 + Z_2) &= \frac{m_2}{2} \cdot (Z_3 + Z_4) \\ \frac{m_2}{m_1} &= \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} \end{aligned}$$

Para una disposición de dos pares de ruedas dentadas, la relación entre los módulos de éstas para que el tren sea recurrente será:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{17 + 67}{13 + 65} = \frac{84}{28} = 3$$

NOTA 1: Otra posible solución sería:

$Z_1 = 13, Z_2 = 67, Z_3 = 17$  y  $Z_4 = 15$ , donde la relación entre los módulos sería:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{13 + 67}{17 + 15} = \frac{80}{32}$$

NOTA 2: Si se desea trabajar con ruedas de 14 dientes o más, se puede recurrir a multiplicar el numerador y el denominador por 2:

$$i = \frac{221}{1005} = \frac{13 \cdot 17}{3 \cdot 5 \cdot 67} \cdot \frac{2}{2} = \frac{17}{67} \cdot \frac{26}{30}$$

En este caso, otra posible solución sería:  $Z_1 = 17, Z_2 = 67, Z_3 = 26$  y  $Z_4 = 30$ , donde la relación entre los módulos sería:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{17 + 67}{26 + 30} = \frac{84}{56} = 1.5$$

## Apartado 2

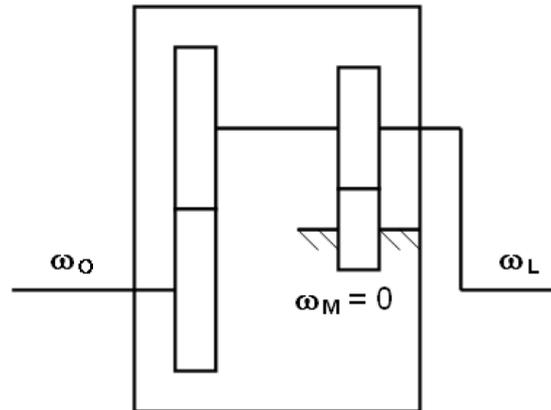
Para obtener la relación de transmisión real de un tren epicicloidal de balancín, a partir de la relación de transmisión aparente, se particulariza para este caso la fórmula de Willis:

$$\mu_A = \frac{\omega_M - \omega_L}{\omega_O - \omega_L} \quad (6.3)$$

Para el caso del tren epicicloidal de balancín  $\omega_M = 0$ , luego  $\mu_A = \omega_L / (\omega_O - \omega_L)$ . Si se considera que la relación de transmisión real es  $i = \omega_O / \omega_L$ , las ecuaciones que vinculan la relación de transmisión real y la aparente serán:

$$i = 1 - \frac{1}{\mu_A} \Rightarrow \mu_A = \frac{1}{1 - i} \quad (6.4)$$

Esta relación de transmisión aparente es en realidad la que nos sirve para calcular el número de dientes que tendrán las ruedas del tren epicicloidal. Operando se tiene que



**Figura 6.2:** Esquema del tren de engranajes epicicloidales de balancín empleado en el apartado 2.

$$\mu_A = \frac{1}{1 - (221/1005)} = \frac{1005}{784} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 67}{2^4 \cdot 7^2} = \frac{15}{16} \cdot \frac{67}{49}$$

Una posible solución sería la siguiente disposición:

$Z_1 = 15$ ,  $Z_2 = 16$ ,  $Z_3 = 67$  y  $Z_4 = 49$ , cuya representación gráfica se muestra en la figura 6.2.

### Apartado 3

Para hallar la relación de transmisión con una pareja de ruedas y un error absoluto menor de  $10^{-4}$  respecto a la dada ( $i = 221/1005$ ), se usa el método de descomposición en fracciones continuas hasta obtener una reducida que cumpla las especificaciones.

A partir de las divisiones llevadas a cabo según la figura 6.3 se pueden obtener las relaciones de transmisión aproximadas y su correspondiente error de la siguiente forma:

	4	1	1	4	1	3	5
1005	221	121	100	21	16	5	1
121	100	21	16	5	1	0	

**Figura 6.3:** Descomposición en fracciones continuas

$$R_1 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$E_1 = |i - R_1| = |0.21990049 - 0.25| = 3.009951 \cdot 10^{-2} > 10^{-4}$$

$$R_2 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$E_2 = |i - R_2| = |0.21990049 - 0.2| = 1.99004910 \cdot 10^{-2} > 10^{-4}$$

$$R_3 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{9} = 0.22222222$$

$$E_3 = |i - R_3| = |0.21990049 - 0.22222222| = 2.32173 \cdot 10^{-3} > 10^{-4}$$

$$R_4 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = \frac{9}{41} = 0.21951219$$

$$E_4 = |i - R_4| = |0.21990049 - 0.21951219| = 3.883 \cdot 10^{-4} > 10^{-4}$$

$$R_5 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{11}{50} = 0.22$$

$$E_5 = |i - R_5| = |0.21990049 - 0.22| = 9.9502 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

$$R_6 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}} = \frac{42}{191} = 0.21989528$$

$$E_6 = |i - R_6| = |0.21990049 - 0.21989528| = 5.21 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$$

Luego la relación de transmisión que cumple las especificaciones es:

$$i' = \frac{11}{50}$$

es decir, un engrane con módulo  $m = 4$  mm. y un número de dientes  $Z_1 = 11$  (piñón) y  $Z_2 = 50$  (rueda).

### 6.3. Cálculo de velocidades en un tren compuesto

Sea un tren de engranajes compuesto, formado por 6 ruedas dentadas y a cuya entrada se encuentra acoplado un motor girando a 2000rpm. Dados los siguientes números de dientes para cada rueda, se pide:

1. Velocidad de rotación de cada rueda.
2. Factor de reducción total del conjunto de engranajes.

Datos:  $Z_1 = 15$ ,  $Z_2 = 45$ ,  $Z_3 = 20$ ,  $Z_4 = 40$ ,  $Z_5 = 10$ ,  $Z_6 = 33$ .

#### Solución

Dado que un tren de engranajes ordinario compuesto se caracteriza porque todos sus ejes son fijos pero poseen más de un engranaje solidariamente unidos en cada eje, se puede realizar el siguiente esquema de conexión de las distintas ruedas dentadas, donde  $\omega_e$  es la entrada y  $\omega_{sal}$  la salida:

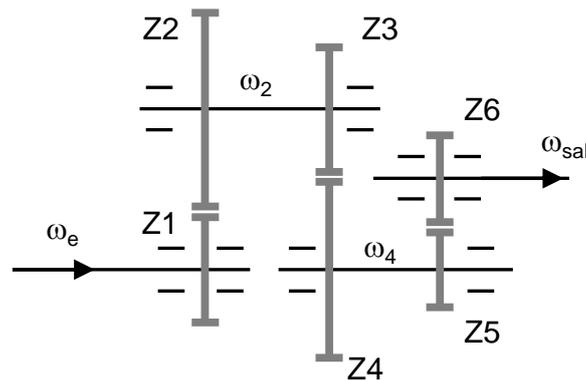


Figura 6.4: Tren de engranajes con 6 ruedas

#### Apartado 1

Primero hallaremos todas las relaciones en función de  $\omega_e$ , sustituyendo su valor numérico al final. Para la rueda 1, tenemos:

$$\omega_1 = \omega_e$$

Las ruedas 2 y 3 giran solidariamente a velocidad  $\omega_2$ . Usando la fórmula de la relación inversa entre número de dientes y velocidades en el par de engranajes en contacto 1-2.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(-\frac{Z_1}{Z_2}\right) \rightarrow \omega_2 = \left(-\frac{15}{45}\right)\omega_1 = -\frac{1}{3}\omega_e$$

donde el signo negativo viene de que hemos asumido en nuestro diseño que todas las ruedas engranan externamente, invirtiendo por tanto el sentido de giro en cada pareja.

Las ruedas 4 y 5 también giran solidariamente a velocidad  $\omega_4$ . Podemos obtener el valor de dicha velocidad a partir de la  $\omega_2$  conocida y sabiendo que las ruedas 3-4 están en contacto:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \rightarrow \omega_4 = \left(-\frac{20}{40}\right) \omega_2 = \left(-\frac{20}{40}\right) \left(-\frac{15}{45}\right) \omega_e = \frac{1}{6} \omega_e$$

Finalmente, la velocidad de salida se obtiene de aplicar la fórmula de la velocidad a las ruedas 5-6 en contacto:

$$\frac{\omega_{sal}}{\omega_4} = \frac{Z_5}{Z_6} \rightarrow \omega_{sal} = \left(-\frac{10}{33}\right) \omega_4 = \left(-\frac{10}{33}\right) \frac{1}{6} \omega_e = -\frac{10}{198} \omega_e$$

En resumen, la velocidad de cada rueda, siendo  $\omega_e=2000$  rpm, vale:

$$\text{Rueda 1:} \quad \omega_1 = \omega_e = 2000 \text{ rpm}$$

$$\text{Ruedas 2 y 3:} \quad \omega_2 = -\frac{1}{3} \omega_e = -666.67 \text{ rpm}$$

$$\text{Ruedas 4 y 5:} \quad \omega_4 = \frac{1}{6} \omega_e = 333.33 \text{ rpm}$$

$$\text{Rueda 6:} \quad \omega_{sal} = \omega_6 = -\frac{10}{198} \omega_e = -101.01 \text{ rpm}$$

donde los signos positivos indican el mismo sentido de giro que a la entrada y los negativos indican el sentido opuesto.

## Apartado 2

La reducción total del tren de engranajes se define como  $\frac{\omega_e}{\omega_{sal}}$ , así que a partir de la velocidad de la rueda 6 hallada más arriba, obtenemos:

$$\text{Reducción total} = \frac{\omega_e}{\omega_{sal}} = -\frac{198}{10} = -19.8$$

es decir, el tren se comporta como una caja reductora de relación de reducción 19.8 y cuyo eje de salida gira en sentido inverso al de entrada.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alejo Avello Iturriagagoitia. *Teoría de Máquinas*. Tecnun (Universidad de Navarra), 2011.